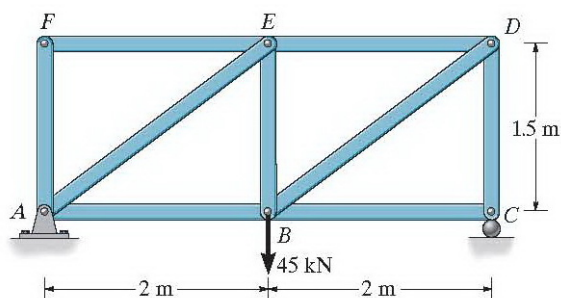


日期：2025 年 12 月 19 日

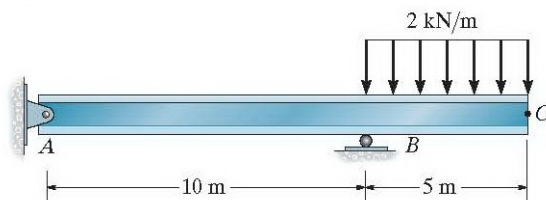
姓名：_____

學號：_____

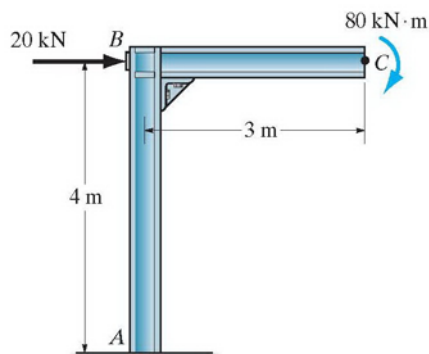
1. 試用卡氏定理求接點 B 的垂直位移。設各構件的斷面積 $A = 400 \text{ mm}^2$ ， $E = 200 \text{ GPa}$ 。(20 分)



2. 試用虛功法求鋼梁 C 點處的撓度與 A 點處的傾角。已知 $E = 200 \text{ GPa}$ ， $I = 70 \times 10^6 \text{ mm}^4$ 。(20 分)

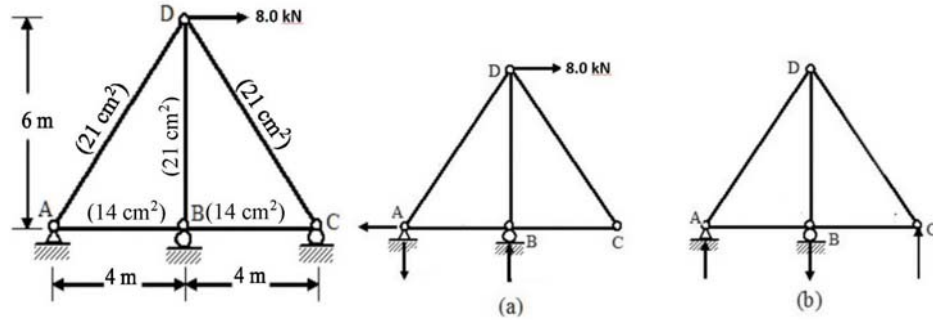


3. 試求構架 C 點的垂直位移。(20 分)

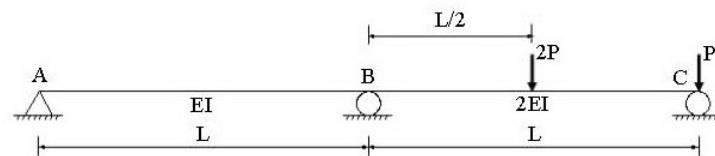


4. 如下圖超靜定桁架，A 點是鉸支承，B 點與 C 點是滾接支承，指定 C 點支承的反力 C_Y 為贅力，請以最小功法計算超靜定桁架各支承點的反力與桿件桿力（構件自重不計，使用其他方法或是使用反力 C_Y 以外其他贅力，一律不予計分）。（每小題 5 分，共 20 分）

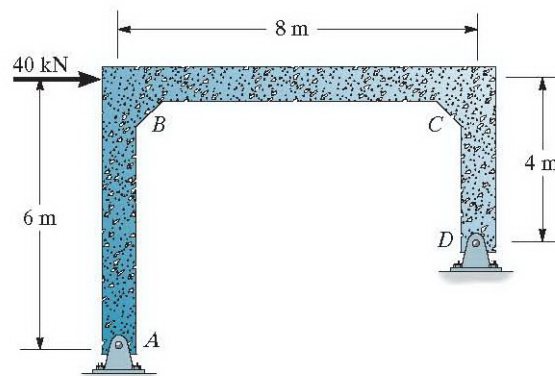
- (1) 計算承受原載重的靜定桁架 S，如圖(a)各桿件桿力。
- (2) 計算承受未知反力 C_Y 的靜定桁架 S，如圖(b)各桿件桿力。
- (3) 依據各桿件桿力，列表計算桁架應變能 U 對贅力 C_Y 的偏微分式。
- (4) 解得 C_Y ，並計算各桿件桿力。



5. 試求下圖結構中 A, B 及 C 點之反力。（20分）

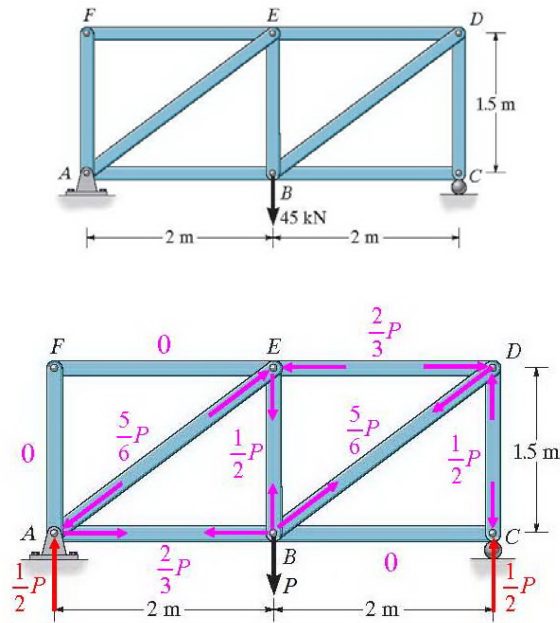


6. 試設 A 與 D 為樞支承，EI 為常數，求出各支承處的反力並畫出此構件之剪力圖與彎矩圖。（20分）



參考解答：

1. 試用卡氏定理求接點 B 的垂直位移。設各構件的斷面積 $A = 400 \text{ mm}^2$ ， $E = 200 \text{ GPa}$ 。(20 分)



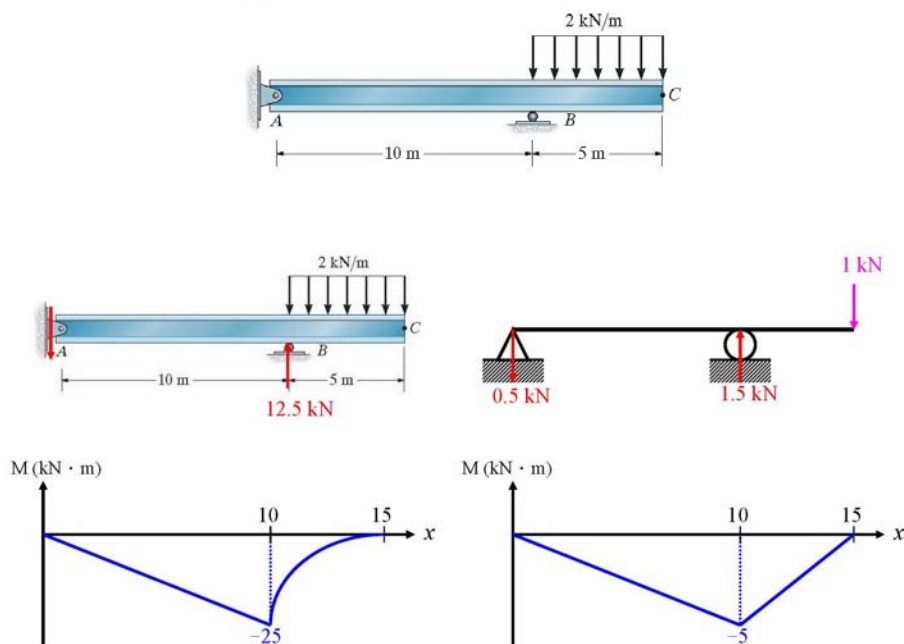
桿件	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N(P = 45)$	L	$N(\frac{\partial N}{\partial P})L$
AB	$\frac{2}{3}P$	$\frac{2}{3}$	30	2	40
AE	$-\frac{5}{6}P$	$-\frac{5}{6}$	-37.5	2.5	78.125
AF	0	0	0	1.5	0
BC	0	0	0	2	0
BD	$\frac{5}{6}P$	$\frac{5}{6}$	37.5	2.5	78.125
BE	$\frac{1}{2}P$	$\frac{1}{2}$	22.5	1.5	16.875
CD	$-\frac{1}{2}P$	$-\frac{1}{2}$	-22.5	1.5	16.875
DE	$-\frac{2}{3}P$	$-\frac{2}{3}$	-30	2	40
EF	0	0	0	2	0

$$\Sigma = 270$$

$$\Delta_B = \sum N(\frac{\partial N}{\partial P}) \frac{L}{AE} = \frac{270 (\text{kN} \cdot \text{m})}{AE} = \frac{270 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^9} = 3.375 \cdot 10^{-3} (\text{m})$$

$$= 3.375 (\text{mm}) \quad (\downarrow)$$

2. 試用虛功法求鋼梁 C 點處的撓度與 A 點處的傾角。已知 $E = 200 \text{ GPa}$,
 $I = 70 \times 10^6 \text{ mm}^4$ 。 (20 分)



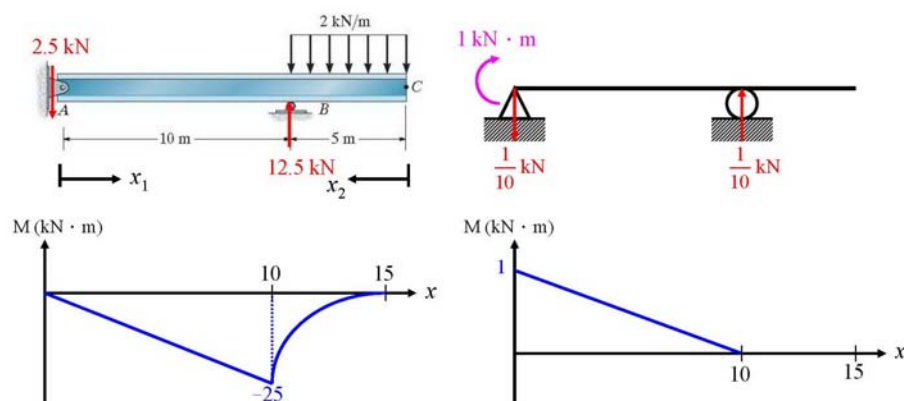
真實外力在梁 AB 段造成彎矩為 $M_1 = -2.5x_1$

真實外力在梁 BC 段造成彎矩為 $M_2 = -x_2^2$

虛單位力在梁 AB 段造成彎矩為 $m_1 = -0.5x_1$

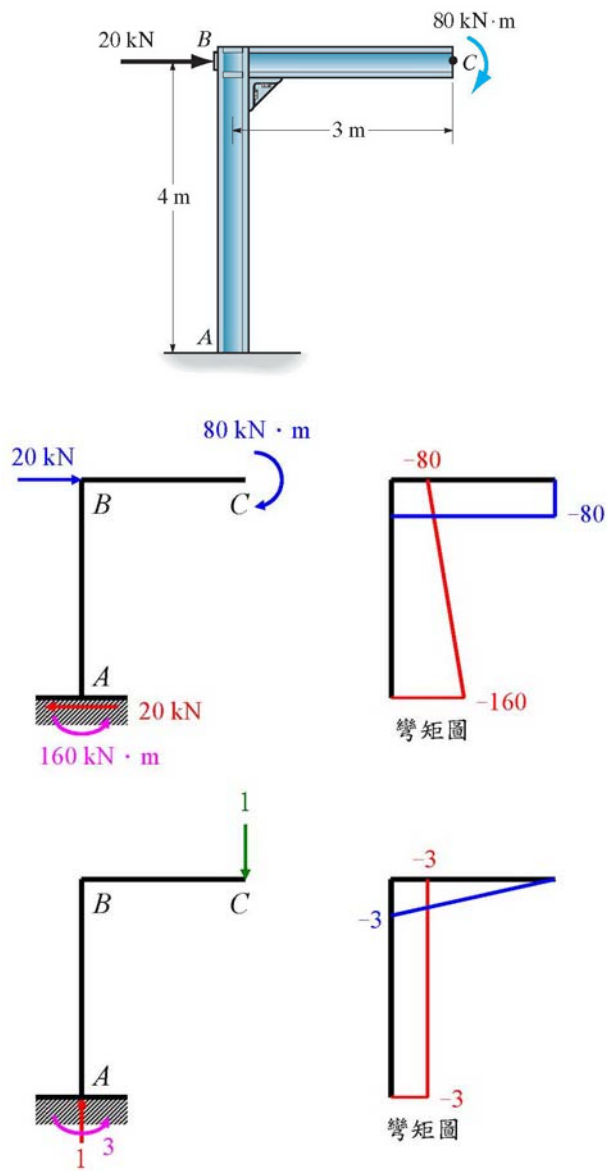
虛單位力在梁 BC 段造成彎矩為 $m_2 = -x_2$

$$\begin{aligned} \therefore 1 \cdot \Delta_C &= \int_0^{10} \frac{(-2.5x_1) \cdot (-0.5x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^5 \frac{(-x_2^2) \cdot (-x_2)}{EI} dx_2 \\ &= \frac{1250}{3EI} + \frac{625}{4EI} = \frac{6875}{12EI} \\ \Rightarrow \Delta_C &= \frac{6875 (\text{kN} \cdot \text{m}^3)}{12EI} = \frac{6875 \cdot 10^3}{12 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 70 \cdot 10^{-6}} = 40.92 \cdot 10^{-3} (\text{m}) \\ &= 40.92 (\text{mm}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 1 \cdot \theta_A &= \frac{1}{6} \cdot \frac{(-25) \cdot 1 \cdot 10}{EI} = -\frac{125}{3EI} \\ \Rightarrow \theta_A &= \frac{125 (\text{kN} \cdot \text{m}^2)}{3EI} = \frac{125 \cdot 10^3}{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 70 \cdot 10^{-6}} = 0.00298 (\text{rad}) \end{aligned}$$

3. 試求構架 C 點的垂直位移。(20 分)

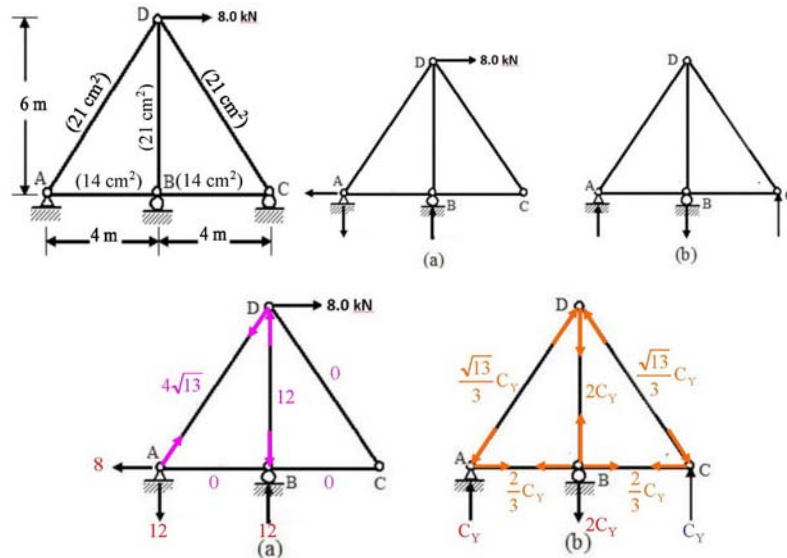


$$1 \cdot \Delta_C = \frac{(-80) \cdot (-3) \cdot 4}{EI} + \frac{1}{2} \frac{(-80) \cdot (-3) \cdot 4}{EI} + \frac{1}{2} \frac{(-80) \cdot (-3) \cdot 3}{EI}$$

$$\Rightarrow \Delta_C = \frac{1800 \text{ (kN} \cdot \text{m}^3\text{)}}{EI}$$

4. 如下圖超靜定桁架，A 點是鉸支承，B 點與 C 點是滾接支承，指定 C 點支承的反力 C_Y 為贅力，請以最小功法計算超靜定桁架各支承點的反力與桿件桿力（構件自重不計，使用其他方法或是使用反力 C_Y 以外其他贅力，一律不予計分）。（每小題 5 分，共 20 分）

- (1) 計算承受原載重的靜定桁架 S，如圖(a)各桿件桿力。
- (2) 計算承受未知反力 C_Y 的靜定桁架 S，如圖(b)各桿件桿力。
- (3) 依據各桿件桿力，列表計算桁架應變能 U 對贅力 C_Y 的偏微分式。
- (4) 解得 C_Y ，並計算各桿件桿力。



$$\text{令 } A = 7 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_{AB} = A_{BC} = 2A, \quad A_{AD} = A_{BD} = A_{CD} = 3A$$

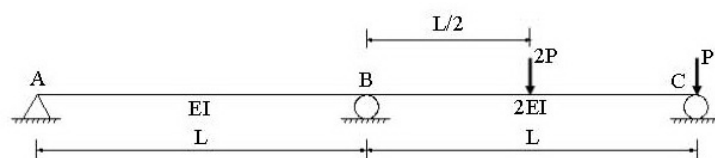
桿件	N	$\frac{\partial N}{\partial C_Y}$	L	A	$\frac{\partial N}{\partial C_Y} \cdot \frac{NL}{A}$	N ($C_Y = 5.36$)
AB	$\frac{2}{3}C_Y$	$\frac{2}{3}$	4	$2A$	$\frac{8}{9} \frac{C_Y}{A}$	3.57
AD	$4\sqrt{13} - \frac{\sqrt{13}}{3}C_Y$	$-\frac{\sqrt{13}}{3}$	$2\sqrt{13}$	$3A$	$\frac{-312\sqrt{13} + 26\sqrt{13}C_Y}{27A}$	7.98
BC	$\frac{2}{3}C_Y$	$\frac{2}{3}$	4	$2A$	$\frac{8}{9} \frac{C_Y}{A}$	3.57
BD	$-12 + 2C_Y$	2	6	$3A$	$\frac{-48 + 8C_Y}{A}$	-1.28
CD	$-\frac{\sqrt{13}}{3}C_Y$	$-\frac{\sqrt{13}}{3}$	$2\sqrt{13}$	$3A$	$\frac{26\sqrt{13}}{27} \frac{C_Y}{A}$	-6.44

$$U = \sum \frac{1}{2} \frac{N^2 L}{AE}$$

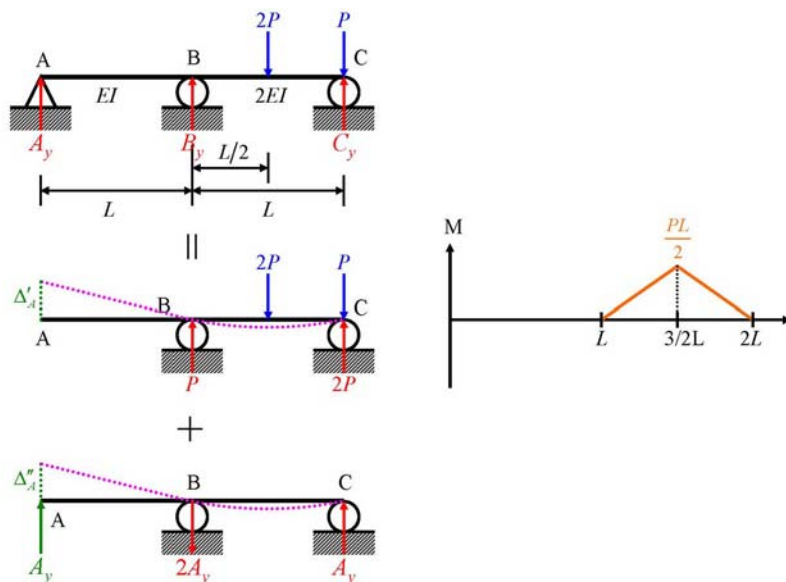
$$\frac{\partial U}{\partial C_Y} = 0 \Rightarrow \sum \frac{\partial N}{\partial C_Y} \frac{NL}{AE} = \frac{1}{AE} \left[-\left(\frac{312\sqrt{13}}{27} + 48 \right) + \frac{264 + 52\sqrt{13}}{27} C_Y \right] = 0$$

$$\Rightarrow C_Y = 5.36 \text{ (kN)}$$

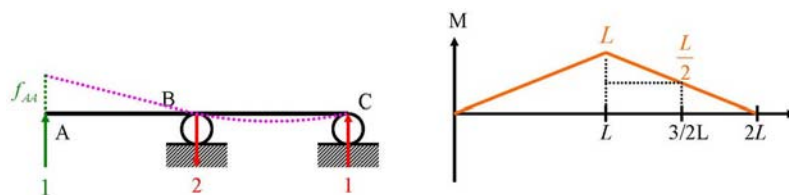
5. 試求下圖結構中A, B及C點之反力。(20分)



此為一度靜不定



$$\Delta_A = \Delta'_A + \Delta''_A = \Delta'_A + A_y \cdot f_{AA} = 0$$



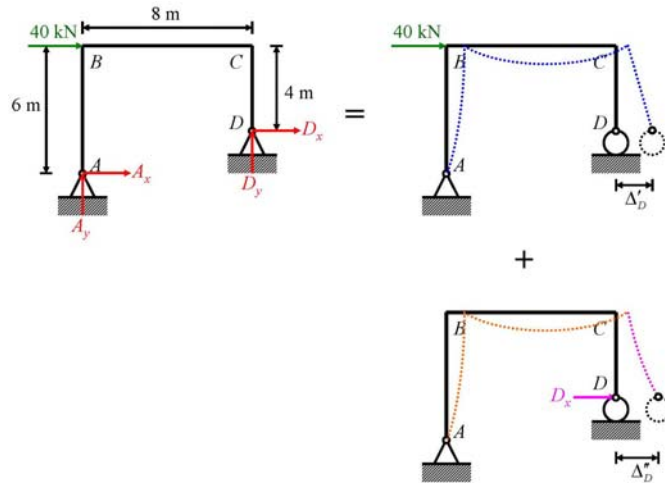
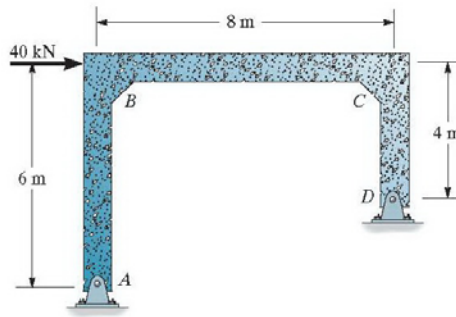
$$\text{由單位力法可得 } \Delta'_A = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{2EI} \left(\frac{PL}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{16} \frac{PL^3}{EI}$$

$$\text{又 } f_{AA} = \frac{1}{3} \frac{L \cdot L \cdot L}{EI} + \frac{1}{3} \frac{L \cdot L \cdot L}{2EI} = \frac{1}{2} \frac{L^3}{EI}$$

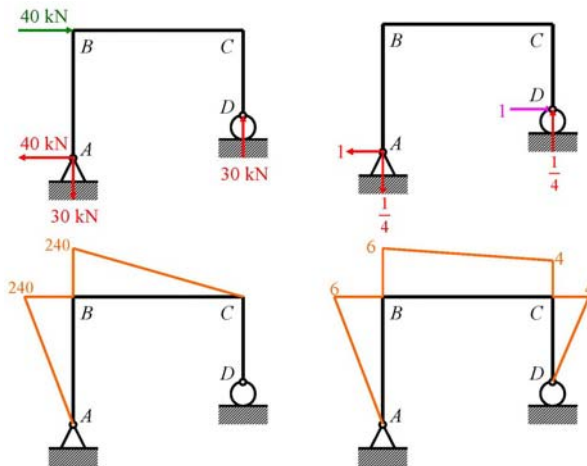
$$\Delta'_A + A_y \cdot f_{AA} = 0 \Rightarrow \frac{1}{16} \frac{PL^3}{EI} + \frac{1}{2} \frac{L^3}{EI} \cdot A_y = 0 \Rightarrow A_y = -\frac{1}{8} P$$

$$\therefore B_y = P - 2A_y = \frac{10}{8} P, \quad C_y = 2P + A_y = \frac{15}{8} P$$

6. 試設A與D為樞支承，EI為常數，求出各支承處的反力。(20分)



$$\Delta_D = \Delta'_D + \Delta''_D = \Delta'_D + f_{DD} \cdot D_x = 0$$



$$\Delta'_D = \frac{1}{3} \frac{240 \cdot 6 \cdot 6}{EI} + \left(\frac{1}{3} \frac{240 \cdot 2 \cdot 8}{EI} + \frac{1}{2} \frac{240 \cdot 4 \cdot 8}{EI} \right) = \frac{8000}{EI}$$

$$f_{DD} = \frac{1}{3} \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{EI} + \left(\frac{1}{3} \frac{2 \cdot 2 \cdot 8}{EI} + \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 4 \cdot 8}{EI} + \frac{1}{2} \frac{4 \cdot 4 \cdot 8}{EI} + \frac{4 \cdot 4 \cdot 8}{EI} \right) + \frac{1}{3} \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{EI} = \frac{296}{EI}$$

$$\Delta_D = \frac{8000}{EI} + \frac{296}{EI} \cdot D_x = 0 \Rightarrow D_x = -\frac{1000}{37} = -27.03 \text{ (kN)}$$

$$A_x = -40 - D_x = -12.97 \text{ (kN)}, \quad D_y = -30 - \frac{1}{4} \cdot D_x = -23.24 \text{ (kN)}$$

$$A_y = 30 + \frac{1}{4} \cdot D_x = 23.24 \text{ (kN)}$$