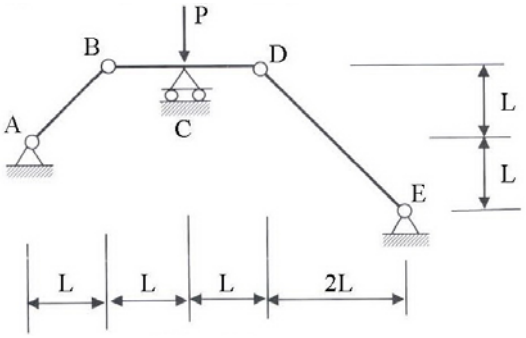
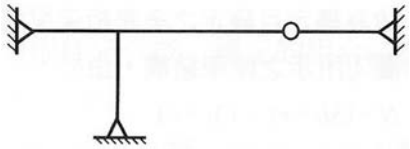
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2025 結構學 3A 班第一次大考參考解答

日期：2025 年 11 月 05 日　　姓名：＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿

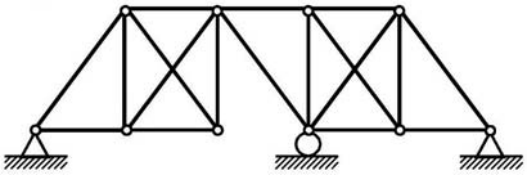
1. 試判斷下列結構之穩定性(stability)與靜定性(static determinacy)。若為不穩定，則說明不穩定的原因;若為靜不定，說明其靜不定次數。(20 分)



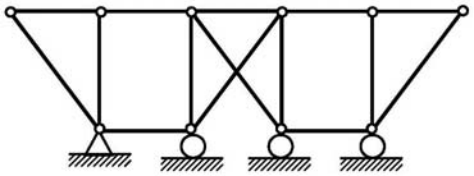
(a) 梁



(b) 構架



(c) 桁架



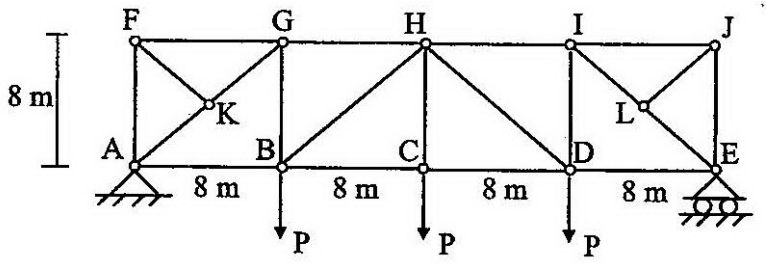
(d) 桁架

(100 鐵路高員、112 地特三等)

2. 如下圖所示對稱桁架，

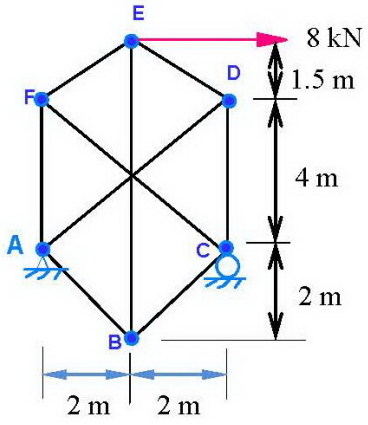
(1) 試問何者為零力桿件? (6 分)

(2) 若所有受拉桿件之容許張力皆為 100kN，所有受壓桿件之容許壓力皆為 60kN，則該桁架可以容許的最大外力 P 為何? (14 分)

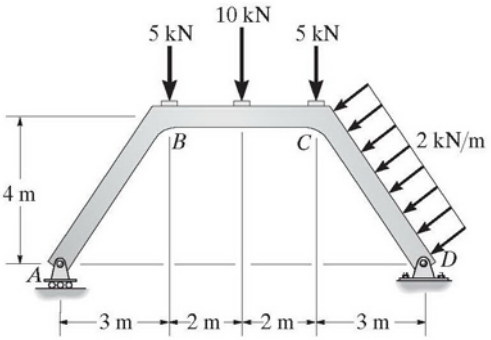


3. 如下圖所示之桁架，當未承受任何載重時，試判斷其為靜定、超靜定或不穩定 (4 分)；當 E 點承受 8 kN 水平力向右時，試求 BE、ED 桿件力=？。(16 分)

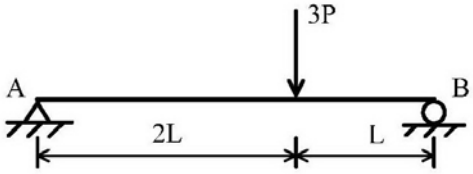
(109 鐵路員級)



4. 請繪製構架各構件的剪力圖和彎矩圖。(20 分)



5. 如下圖所示之簡支梁，若楊氏模數 E 及斷面二次矩 I 皆為定值，試以共軛梁法求最大位移。(以其他方法求解一律不予計分)(20 分)　　(102 高考)



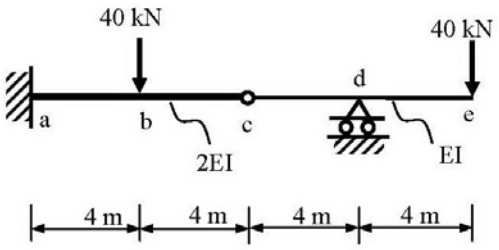
6. 如下圖所示梁，a 點為固接，c 點為內鉸接，d 點為滾支承。梁 ac 段之彈性模數與慣性矩乘積為 2EI，ce 段之彈性模數與慣性矩乘積為 EI：　(101 結技)

(1) 繪彎矩圖；(5 分)

(2) 試求 e 點之垂直位移；(5 分)

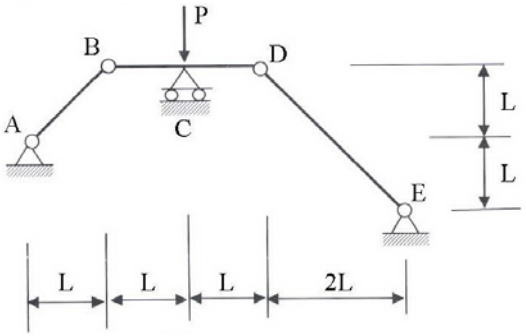
(3) 試求 e 點之轉角；(5 分)

(4) 試求 c 點之垂直位移；(5 分)

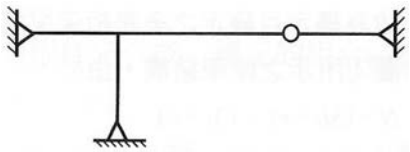


參考解答:

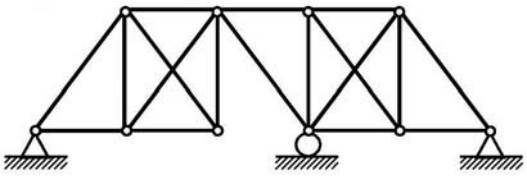
1. 試判斷下列結構之穩定性(stability)與靜定性(static determinacy)。若為不穩定，則說明不穩定的原因;若為靜不定，說明其靜不定次數。(20%)



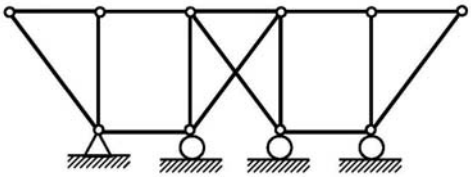
(a) 梁



(b) 構架



(c) 桁架



(d) 桁架

(100 鐵路高員、112 地特三等)

(a) 不穩定，反力交於一點

(b) 2 度靜不定 (2 個圈，支承-3，內銷-1，$2\times3-3-1=2$)

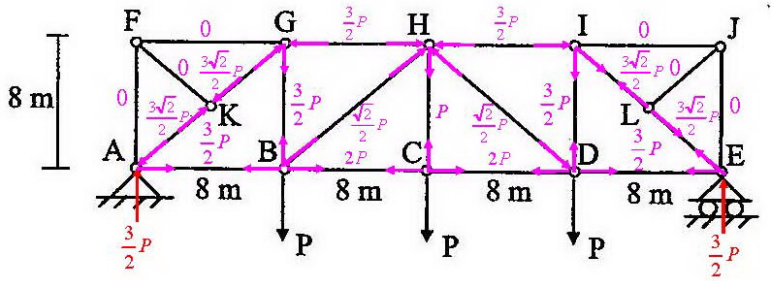
(c) 3 度靜不定 ($b=18,\ r=5,\ j=10,\ b+r-2j=3$)

(d) 靜定 ($b=15,\ r=5,\ j=10,\ b+r-2j=0$)

2. 如下圖所示對稱桁架，

(1) 試問何者為零力桿件? (6 分)

(2) 若所有受拉桿件之容許張力皆為 100kN，所有受壓桿件之容許壓力皆為 60kN，則該桁架可以容許的最大外力 P 為何? (14 分)



(1) 零力桿件: AF、FG、FK、EJ、IF、JL

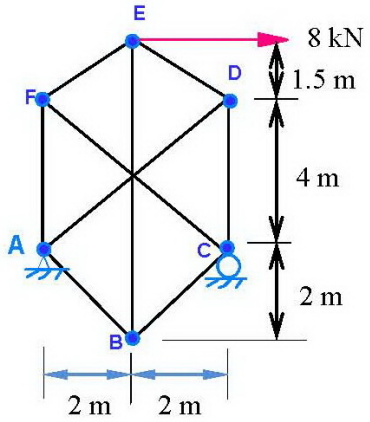
(2) 最大拉力: $2P=100 \Rightarrow P=50$ (kN)

最大壓力: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}P=60 \Rightarrow P=20\sqrt{2}$ (kN) $=28.28$ (kN)

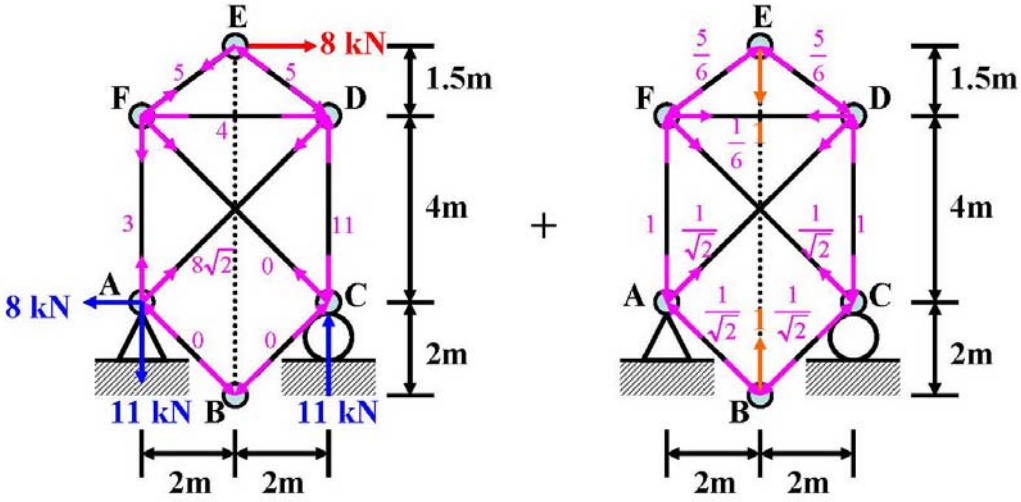
$\therefore\ P_{max}=28.28$ (kN)

3. 如下圖所示之桁架，當未承受任何載重時，試判斷其為靜定、超靜定或不穩定 (4 分)；當 E 點承受 8 kN 水平力向右時，試求 BE、ED 桿件力=？。(16 分)

(109 鐵路員級)



=



(a) **(b)**

使用替代件法將原問題拆解如上(a)圖與(b)圖

(1) 先計算(a)圖支承反力

由 $\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow B_y = 15\,(\text{kN})$ (向上)

由 $\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow A_x = 8\,(\text{kN})$ (向左)

由 $\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow A_y = 15\,(\text{kN})$ (向下)

再計算(a)圖桿件內力

由節點 E 可得 $F_{EF} = 5\,(\text{kN})$ (拉)、$F_{DE} = 5\,(\text{kN})$ (壓)

由節點 B 可得 $F_{AB} = 0\,(\text{kN})$、$F_{BC} = 0\,(\text{kN})$

由節點 C 可得 $F_{CF} = 0\,(\text{kN})$、$F_{CD} = 11\,(\text{kN})$ (壓)

由節點 A 可得 $F_{AD} = 8\sqrt{2}\,(\text{kN})$ (拉)、$F_{AF} = 3\,(\text{kN})$ (拉)

由節點 D 或 F 可得 $F_{FD} = 4\,(\text{kN})$ (壓)

(2) 再計算(b)圖桿件內力

由節點 E 可得 $F_{EF}=\frac{5}{6}$ (kN) (壓) 、 $F_{DE}=\frac{5}{6}$ (kN) (壓)

由節點 B 可得 $F_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (kN) (壓) 、 $F_{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (kN) (壓)

由節點 C 可得 $F_{CF}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (kN) (拉) 、 $F_{CD}=1$ (kN) (壓)

由節點 A 可得 $F_{AD}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (kN) (拉) 、 $F_{AF}=1$ (kN) (壓)

由節點 D 或 F 可得 $F_{FD}=\frac{1}{6}$ (kN) (拉)

∵ 原本沒有 DF 桿件

∴ $F_{FD}=0 \quad \Rightarrow -4+\frac{1}{6}x=0 \quad \Rightarrow x=24$

∴ $F_{AB}=0-\frac{1}{\sqrt{2}}x=-12\sqrt{2}$ (kN) 即 $F_{AB}=12\sqrt{2}$ (kN) (壓)

$F_{AD}=8\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}x=20\sqrt{2}$ (kN) (拉)

$F_{AF}=3-x=-21$ (kN) 即 $F_{AF}=21$ (kN) (壓)

$F_{BC}=0-\frac{1}{\sqrt{2}}x=-12\sqrt{2}$ (kN) 即 $F_{BC}=12\sqrt{2}$ (kN) (壓)

$F_{CD}=-11-x=-35$ (kN) 即 $F_{CD}=35$ (kN) (壓)

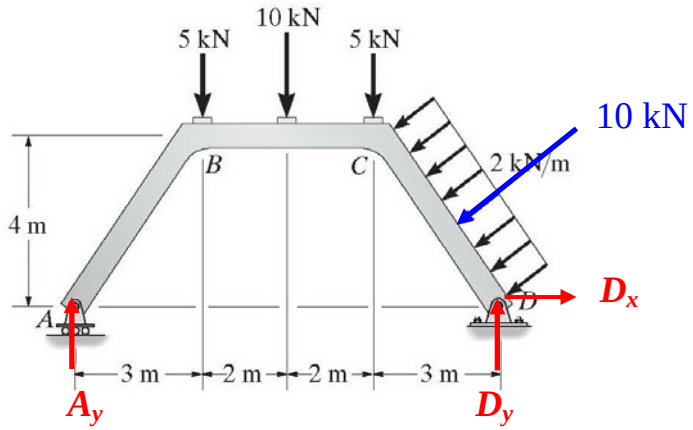
$F_{CF}=\frac{1}{\sqrt{2}}x=12\sqrt{2}$ (kN) (拉)

$F_{DE}=-5-\frac{5}{6}x=-25$ (kN) 即 $F_{DE}=25$ (kN) (壓)

$F_{EF}=5-\frac{5}{6}x=-15$ (kN) 即 $F_{EF}=15$ (kN) (壓)

$F_{FD}=0+x=24$ (kN) (拉)

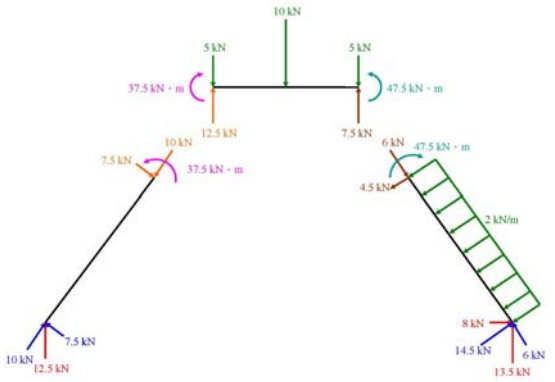
4. 請繪製構架各構件的剪力圖和彎矩圖。(20 分)

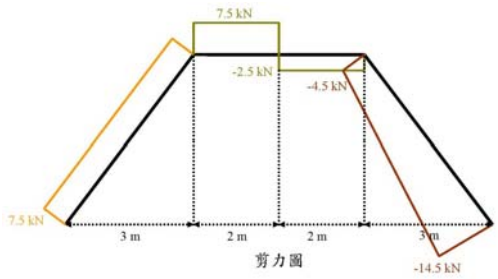


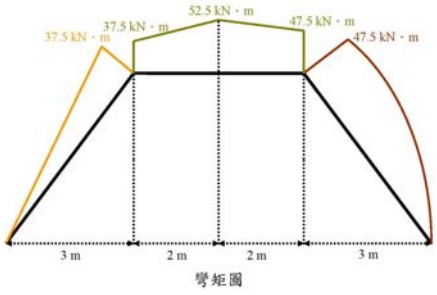
$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow A_y \cdot 10 - 5 \cdot 7 - 10 \cdot 5 - 5 \cdot 3 - 10 \cdot 2.5 = 0 \quad \Rightarrow A_y = 12.5\,(\text{kN})$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow A_y + D_y - 5 - 10 - 5 - 10 \cdot \frac{3}{5} = 0 \quad \Rightarrow D_y = 13.5\,(\text{kN})$$

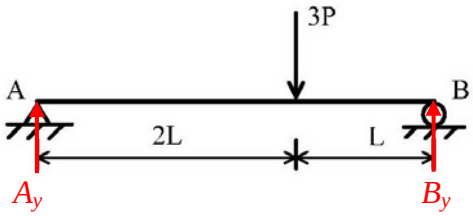
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow D_x - 10 \cdot \frac{4}{5} = 0 \quad \Rightarrow D_x = 8\,(\text{kN})$$





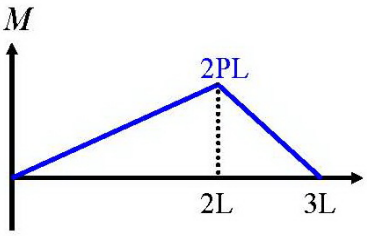


5. 如下圖所示之簡支梁，若楊氏模數 E 及斷面二次矩 I 皆為定值，試以共軛梁法求最大位移。（以其他方法求解一律不予計分）（20 分）　　（102 高考）

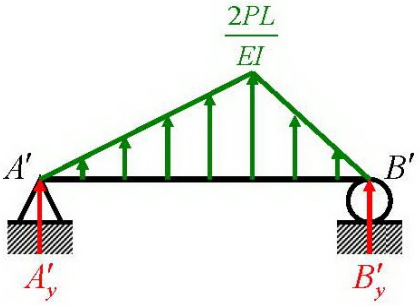


$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow A_y \cdot 3L - 3P \cdot L = 0 \quad \Rightarrow A_y = P$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow A_y + B_y - 3P = 0 \quad \Rightarrow B_y = 2P$$



彎矩圖



共軛梁

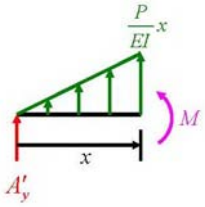
共軛梁上剪力對應真實梁傾角；共軛梁上彎矩對應真實梁位移

∴ 真實梁上最大位移對應到共軛梁上最大彎矩

共軛梁上最大彎矩發生在共軛梁上剪力為零之處

$$\sum M_{B'} = 0 \quad \Rightarrow A'_y \cdot 3L + \frac{1}{2} \cdot 2L \cdot \frac{2PL}{EI} \cdot (\frac{2L}{3} + L) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{2PL}{EI} \cdot \frac{2L}{3} = 0$$

$$\Rightarrow A'_y = -\frac{4}{3}\frac{PL^2}{EI}$$



假設離 A' 點 x 處有最大彎矩 M，此處剪力為零，即

$$A'_y + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{Px}{EI} = 0 \quad \Rightarrow x = \sqrt{\frac{8}{3}}L = \frac{2\sqrt{6}}{3}L = 1.633L$$

$$M - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{Px}{EI} \cdot \frac{x}{3} - A'_y \cdot x = 0 \quad \Rightarrow M = -\frac{16\sqrt{6}}{27} \cdot \frac{PL^3}{EI} = -1.452\frac{PL^3}{EI}$$

∴ 梁在距離左支承 $1.633L$ 處有最大位移 $v = 1.452\frac{PL^3}{EI}$（向下）

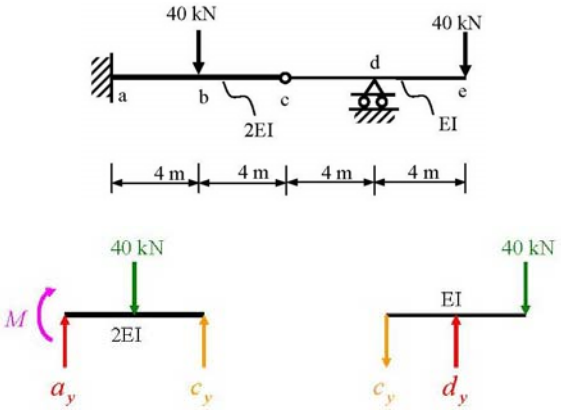
6. 如下圖所示梁，a 點為固接，c 點為內鉸接，d 點為滾支承。梁 ac 段之彈性模數與慣性矩乘積為 2EI，ce 段之彈性模數與慣性矩乘積為 EI：　（101 結技）

(1) 繪彎矩圖；（5 分）

(2) 試求 e 點之垂直位移；（5 分）

(3) 試求 e 點之轉角；（5 分）

(4) 試求 c 點之垂直位移；（5 分）



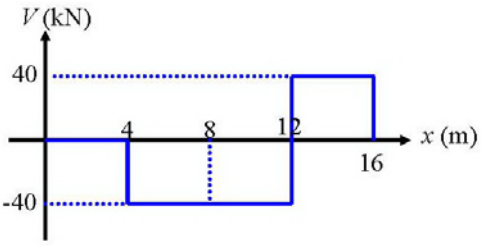
(1) 此為靜定梁，由右圖

$$\sum M_c = 0 \quad \Rightarrow 40\cdot 8 - d_y \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow d_y = 80\,(\text{kN})$$

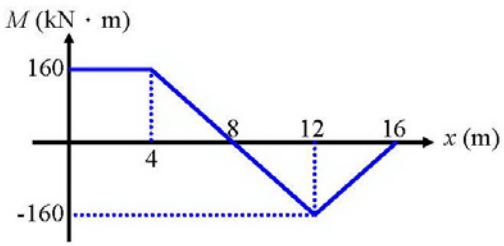
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow c_y = 40\,(\text{kN})$$

由左圖: $\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow a_y = 0\,(\text{kN})$

$$\sum M_a = 0 \quad \Rightarrow M + 40\cdot 4 - 40\cdot 8 = 0 \quad \Rightarrow M = 160\,(\text{kN})$$

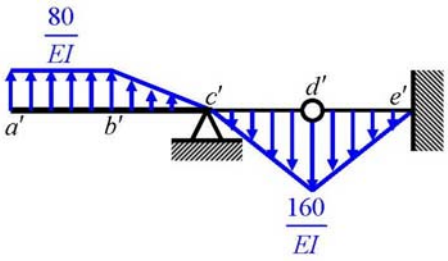


剪力圖

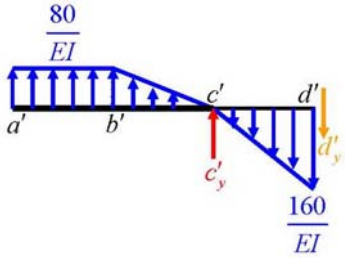


彎矩圖

(2) 共軛梁如下



求 e 點之垂直位移，即求共軛梁上 e' 點彎矩

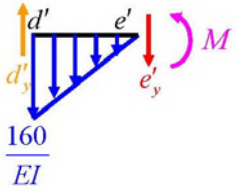


$$\sum M_{c'}=0 \quad \Rightarrow 4\cdot\frac{80}{EI}\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{80}{EI}\cdot(\frac{2}{3}\cdot 4)+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{160}{EI}\cdot(\frac{2}{3}\cdot 4)+d'_y\cdot 4=0$$

$$\Rightarrow d'_y=-\frac{800}{EI}$$

$$\sum M_{e'}=0 \quad \Rightarrow M+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{160}{EI}\cdot(\frac{2}{3}\cdot 4)-d'_y\cdot 4=0$$

$$\Rightarrow M=-\frac{12160}{3EI}$$



$$\therefore\ \Delta_e=\frac{12160}{3EI}\quad(\downarrow)$$

(3) 求 e 點之轉角，即求共軛梁上 e' 點剪力

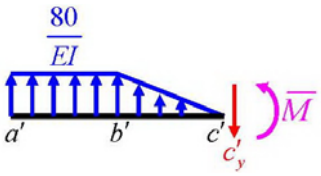
$$\sum F_y=0 \quad \Rightarrow e'_y+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{160}{EI}-d'_y=0 \quad \Rightarrow e'_y=-\frac{1120}{EI}$$

$$\therefore\ \theta_e=\frac{1120}{EI}\quad(\text{順時鐘方向})$$

(4) 求 c 點之垂直位移，即求共軛梁上 c' 點彎矩

$$\sum M_{c'}=0 \quad \Rightarrow \overline{M}-4\cdot\frac{80}{EI}\cdot 6-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{80}{EI}\cdot(\frac{2}{3}\cdot 4)=0$$

$$\Rightarrow \overline{M}=\frac{7040}{3EI}$$



$$\therefore\ \Delta_c=\frac{7040}{3EI}\quad(\uparrow)$$