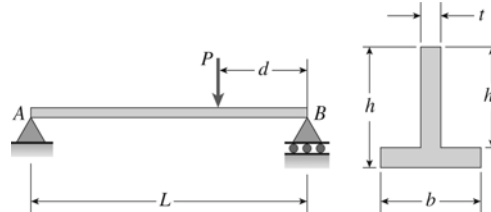
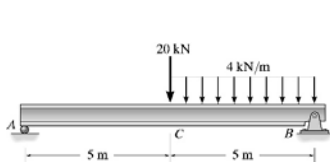


1. 載重 P 作用於一簡支樑 AB 上(如圖一)，求樑的最大拉應力 σ_t 及最大壓應力 σ_c 。數值資料如下： $P = 6.2 \text{ kN}$ ， $L = 3.2 \text{ m}$ ， $d = 1.25 \text{ m}$ ， $b = 80 \text{ mm}$ ， $t = 25 \text{ mm}$ ， $h = 120 \text{ mm}$ 及 $h_1 = 90 \text{ mm}$ 。(20%)

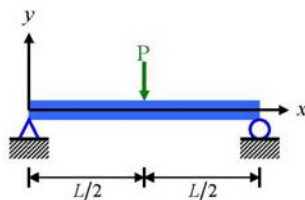


圖一

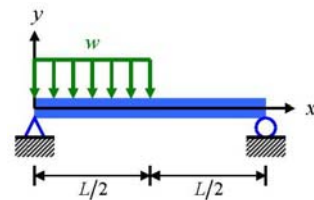
2. 圖二(a)所示，A-36 鋼($E = 200 \text{ GPa}$)簡支樑，支撐負載，試求其中心 C 點的撓度， $I = 0.1457(10^{-3}) \text{ m}^4$ 。已知如圖二(b)所示在剪支梁中央受到集中荷重 P 作用時，其彈性變位曲線 ($0 \leq x \leq L/2$) $v = \frac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ ；而如圖二(c)所示在 $0 \leq x \leq L/2$ 段落受到均佈載重 w 作用，其彈性變位曲線在 $0 \leq x \leq L/2$ 段落是 $v = \frac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ ，在 $L/2 \leq x \leq L$ 段落，彈性變位曲線是 $v = \frac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ 。(20%)



圖二(a)

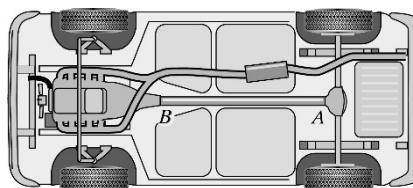


圖二(b)



圖二(c)

3. 如圖三所示，汽車傳動軸 AB 被設計成一薄壁管。當軸以 1500 rev/min 旋轉時引擎輸出 125 kW 。若軸的外徑為 62.5 mm 。求軸壁的最小厚度。材料的容許剪應力為 $\tau_{allow} = 50 \text{ MPa}$ 。(20%)



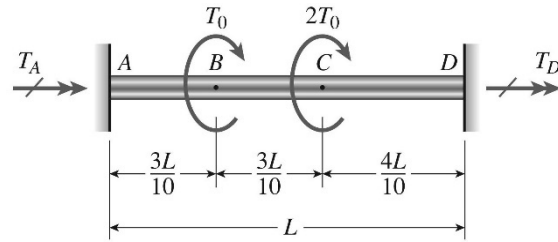
圖三

4. 固定支撐的實心圓桿 $ABCD$ ，受到扭矩 T_0 和 $2T_0$ 作用，其作用方向如圖四所示。

(1) 試導出桿的最大扭轉角 $\theta_{\max}$ 公式。(10%)

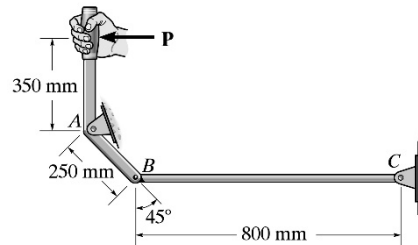
(2) 若施加在 B 的扭矩 T_0 反向的話，求 $\theta_{\max}$ 。(10%)

(材料剪力模數為 G ，極慣性矩為 I_p)



圖四

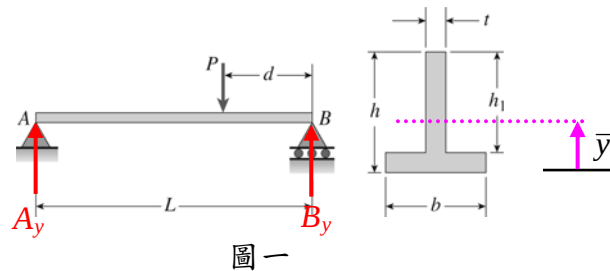
5. 如圖五所示，試求 A-36 鋼控制桿 BC ($E = 200 \text{ GPa}$ ，降伏強度 $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$) 能施於把手，而不引起挫曲之最大力 P ，桿直徑為 25 mm 。(假設 BC 桿件在 B 端與 C 端都為銷接)(20%)



圖五

[參考解答]

1. 載重 P 作用於一簡支樑 AB 上(如圖一)，求樑的最大拉應力 σ_t 及最大壓應力 σ_c 。數值資料如下： $P = 6.2 \text{ kN}$ ， $L = 3.2 \text{ m}$ ， $d = 1.25 \text{ m}$ ， $b = 80 \text{ mm}$ ， $t = 25 \text{ mm}$ ， $h = 120 \text{ mm}$ 及 $h_1 = 90 \text{ mm}$ 。(20%)



$$\bar{y} = \frac{b(h-h_1) \cdot \frac{h-h_1}{2} + t \cdot h_1 \cdot (h-h_1 + \frac{h_1}{2})}{b(h-h_1) + t \cdot h_1} = \frac{1365}{31} = 44.0323 \text{ (mm)}$$

$$I = \frac{b(h-h_1)^3}{12} + b(h-h_1) \cdot (\bar{y} - \frac{h-h_1}{2})^2 + \frac{t \cdot h_1^3}{12} + t \cdot h_1 \cdot (h-h_1 + \frac{h_1}{2} - \bar{y})^2$$

$$= 5.8794 \cdot 10^6 \text{ (mm}^4\text{)} = 5.8794 \cdot 10^{-6} \text{ (m}^4\text{)}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \cdot L - P \cdot d = 0 \Rightarrow A_y = \frac{Pd}{L}$$

$$M_{\max} = A_y \cdot (L-d) = \frac{Pd}{L} (L-d) = 4.7227 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$$

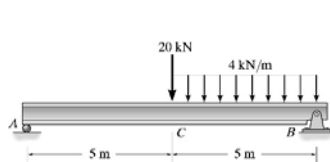
$$(\sigma_c)_{\max} = -\frac{M_{\max} \cdot (h-\bar{y})}{I} = -\frac{4.7227 \cdot 10^3 \cdot (120-44.0323) \cdot 10^{-3}}{5.8794 \cdot 10^{-6}}$$

$$= -61.0220 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = -61.0220 \text{ (MPa)}$$

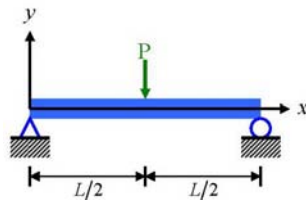
$$(\sigma_t)_{\max} = -\frac{M_{\max} \cdot (-\bar{y})}{I} = -\frac{4.7227 \cdot 10^3 \cdot (-44.0323) \cdot 10^{-3}}{5.8794 \cdot 10^{-6}}$$

$$= 35.3695 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 35.3695 \text{ (MPa)}$$

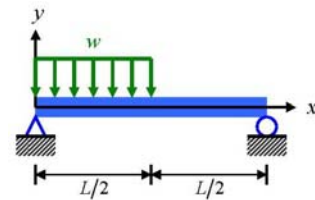
2. 圖二(a)所示，A-36 鋼($E = 200 \text{ GPa}$)簡支樑，支撐負載，試求其中心 C 點的撓度， $I = 0.1457(10^{-3}) \text{ m}^4$ 。已知如圖二(b)所示在剪支梁中央受到集中荷重 P 作用時，其彈性變位曲線 ($0 \leq x \leq L/2$) $v = \frac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ ；而如圖二(c)所示在 $0 \leq x \leq L/2$ 段落受到均佈載重 w 作用，其彈性變位曲線在 $0 \leq x \leq L/2$ 段落是 $v = \frac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ ，在 $L/2 \leq x \leq L$ 段落，彈性變位曲線是 $v = \frac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ 。(20%)



圖二(a)



圖二(b)



圖二(c)

由圖二(b)，在 $x = L/2$ ，即中心 C 點處的位移為

$$\begin{aligned} v'_C &= \frac{-P \cdot \frac{L}{2}}{48EI} [3L^2 - 4(\frac{L}{2})^2] = -\frac{PL^3}{48EI} \\ &= -\frac{(20 \cdot 10^3) \cdot 10^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 0.1457 \cdot 10^{-3}} = -14.2988 \cdot 10^{-3} \text{ (m)} = -14.2988 \text{ (mm)} \end{aligned}$$

由圖二(c)，在 $x = L/2$ ，即中心 C 點處的位移為

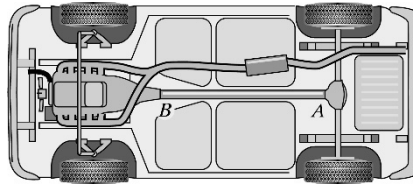
$$\begin{aligned} v''_C &= \frac{-w \cdot \frac{L}{2}}{384EI} [16 \cdot (\frac{L}{2})^3 - 24L \cdot (\frac{L}{2})^2 + 9L^3] = -\frac{5wL^4}{768EI} \\ &= -\frac{5 \cdot (4 \cdot 10^3) \cdot 10^4}{768 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 0.1457 \cdot 10^{-3}} = -8.9367 \cdot 10^{-3} \text{ (m)} = -8.9367 \text{ (mm)} \end{aligned}$$

∴ 可得圖二(a)，在 $x = L/2$ ，即中心 C 點處的位移為

$$v_C = v'_C + v''_C = -14.2988 - 8.9367 = -23.2355 \text{ (mm)}$$

表示在 C 點處向下位移 23.2355 (mm)

3. 如圖三所示，汽車傳動軸 AB 被設計成一薄壁管。當軸以 1500 rev/min 旋轉時引擎輸出 125 kW 。若軸的外徑為 62.5 mm 。求軸壁的最小厚度。材料的容許剪應力為 $\tau_{allow} = 50 \text{ MPa}$ 。(20%)



圖三

$$\omega = \frac{1500 \cdot 2\pi}{60} = 157.08 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

$$P = T\omega \Rightarrow 125 = T \cdot 157.08 \Rightarrow T = 0.795773 (\text{kN} \cdot \text{m})$$

$$\tau_{allow} = \frac{T \cdot c}{J} \Rightarrow 50 \cdot 10^6 = \frac{0.795773 \cdot 10^3 \cdot 31.25 \cdot 10^{-3}}{\frac{\pi}{2} (31.25^4 - r_i^4) \cdot 10^{-12}}$$

$$\Rightarrow (31.25^4 - r_i^4) = 316628$$

$$\Rightarrow r_i = 28.25 (\text{mm})$$

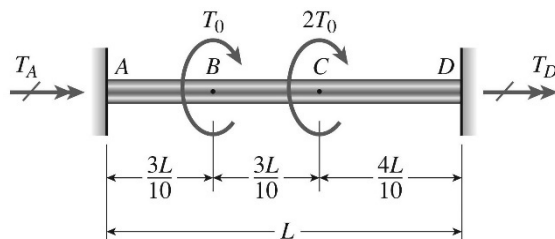
$$\therefore \text{管壁厚 } t = 31.25 - 28.25 = 3 (\text{mm})$$

4. 固定支撐的實心圓桿 $ABCD$ ，受到扭矩 T_0 和 $2T_0$ 作用，其作用方向如圖四所示。

(1) 試導出桿的最大扭轉角 $\theta_{\max}$ 公式。(10%)

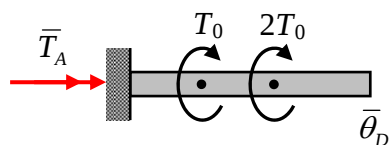
(2) 若施加在 B 的扭矩 T_0 反向的話，求 $\theta_{\max}$ 。(10%)

(材料剪力模數為 G ，極慣性矩為 I_p)



圖四

$$(1) \sum T = 0 \Rightarrow T_A + T_D = 3T_0$$



$$\sum T = 0 \Rightarrow \bar{T}_A = 3T_0$$

$$\bar{\theta}_D = \frac{-\bar{T}_A \cdot \frac{3L}{10}}{I_p G} + \frac{(-\bar{T}_A + T_0) \cdot \frac{3L}{10}}{I_p G} = \frac{-\frac{3L}{2} T_0}{I_p G}$$



$$\theta'_D = \frac{T_D L}{I_p G}$$

$\therefore D$ 端為固定端

$$\therefore \theta_D = \bar{\theta}_D + \theta'_D = 0 \Rightarrow \frac{-\frac{3L}{2} T_0}{I_p G} + \frac{T_D L}{I_p G} = 0$$

$$\Rightarrow T_D = \frac{3}{2} T_0$$

$$\therefore T_A = \frac{3}{2} T_0$$

$$AB \text{ 段扭矩 } T_{AB} = -\frac{3}{2} T_0$$

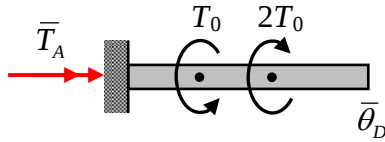
$$BC \text{ 段扭矩 } T_{BC} = -\frac{1}{2} T_0$$

$$CD \text{ 段扭矩 } T_{CD} = \frac{3}{2} T_0$$

$\therefore$ 扭轉角最大發生在 C 點處 ($x = \frac{3L}{5}$)

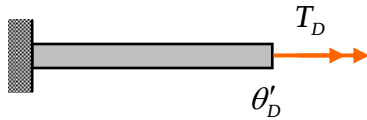
$$\theta_{\max} = \frac{\frac{4L}{10} T_D}{I_p G} = \frac{\frac{4L}{10} \cdot \frac{3}{2} T_0}{I_p G} = \frac{3 T_0 L}{5 I_p G}$$

$$(2) \sum T = 0 \Rightarrow T_A + T_D = T_0$$



$$\sum T = 0 \Rightarrow \bar{T}_A = T_0$$

$$\bar{\theta}_D = \frac{-\bar{T}_A \cdot \frac{3L}{10}}{I_p G} + \frac{(-\bar{T}_A - T_0) \cdot \frac{3L}{10}}{I_p G} = \frac{-\frac{9L}{10} T_0}{I_p G}$$



$$\theta'_D = \frac{T_D L}{I_p G}$$

$\therefore$ D 端為固定端

$$\therefore \theta_D = \bar{\theta}_D + \theta'_D = 0 \Rightarrow \frac{-\frac{9L}{10} T_0}{I_p G} + \frac{T_D L}{I_p G} = 0$$

$$\Rightarrow T_D = \frac{9}{10} T_0$$

$$\therefore T_A = \frac{1}{10} T_0$$

$$\text{AB 段扭矩 } T_{AB} = -\frac{1}{10} T_0$$

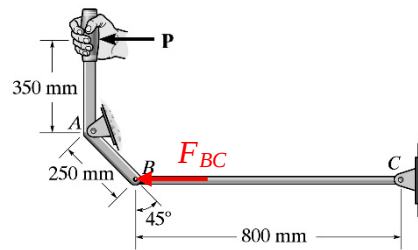
$$\text{BC 段扭矩 } T_{BC} = -\frac{11}{10} T_0$$

$$\text{CD 段扭矩 } T_{CD} = \frac{9}{10} T_0$$

$\therefore$ 扭轉角最大發生在 C 點處 ($x = \frac{3L}{5}$)

$$\theta_{\max} = \frac{\frac{4L}{10} T_D}{I_p G} = \frac{\frac{4L}{10} \cdot \frac{9}{10} T_0}{I_p G} = \frac{9}{25} \frac{T_0 L}{I_p G}$$

5. 如圖五所示，試求 A-36 鋼控制桿 BC ($E = 200 \text{ GPa}$ ，降伏強度 $\sigma_Y = 250 \text{ MPa}$) 能施於把手，而不引起挫曲之最大力 P ，桿直徑為 25 mm 。(假設 BC 桿件在 B 端與 C 端都為銷接)(20%)



圖五

假設把手在節點 B 受桿件 BC 的壓力為 F_{BC}

$$\text{由 } \sum M_A = 0 \Rightarrow P \cdot 0.35 = F_{BC} \cdot \sin 45^\circ \cdot 0.25$$

$$\Rightarrow F_{BC} = \frac{7\sqrt{2}}{5} P = 1.9799P$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0.025^2}{4} = 0.15625 \cdot 10^{-3} \pi \text{ (m}^2\text{)} = 0.49087 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^2\text{)}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0.025^4}{32} = 38.349520 \cdot 10^{-9} \text{ (m}^4\text{)}$$

$$I_x = I_y = \frac{J}{2} = 19.174760 \cdot 10^{-9} \text{ (m}^4\text{)}$$

$\therefore$ BC 桿件兩端銷接，故有效長度因子取 $K = 1$

$$\therefore \text{臨界挫曲載重 } F_{BC} = P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL_{BC})^2}$$

$$\Rightarrow 1.9799P = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 19.174760 \cdot 10^{-9}}{(1 \cdot 0.8)^2} = 59140$$

$$\Rightarrow P = 29870 \text{ (N)} = 29.87 \text{ (kN)}$$

臨界挫曲應力

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{59140}{0.49087 \cdot 10^{-3}} = 120.48 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 120.48 \text{ (MPa)} < \sigma_Y$$

$\therefore$ 挫曲應力小於降伏應力

$\therefore$ 所以桿件變形行為由挫曲主控