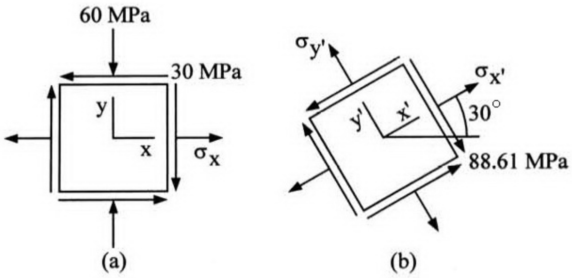
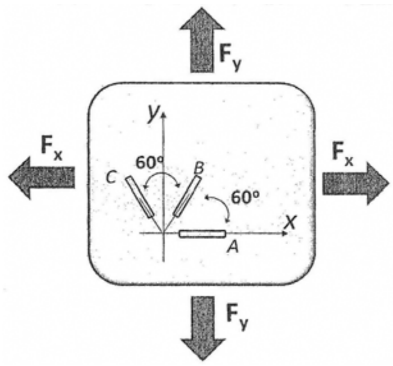
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2025 材料力學 2AB 班第三次大考參考解答

日期：2025 年 06 月 19 日　　姓名：______________　　學號：______________

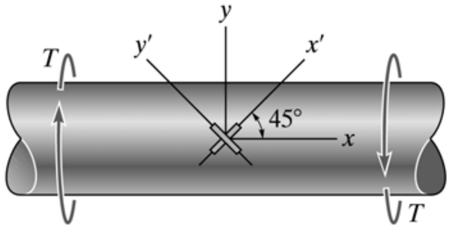
1. 有一平面應力元素受應力如下圖(a)所示，當此元素逆時鐘方向旋轉30°後，其應力狀況如下圖(b)所示。請計算σ_x、$\sigma_{x'}$、$\sigma_{y'}$及此元素之主軸應力 (principal stresses) 與主軸應力方向，並將主軸應力標示於旋轉至主軸應力方向之應力元素上。 (20 分)



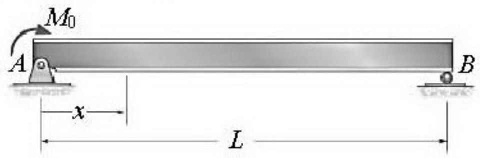
2. 一線彈性材料所製成之均質平板，因受到 x 與 y 方向上力量$\mathbf{F_x}$與$\mathbf{F_y}$之作用，使其處於均勻之平面應力狀態。已知平板之彈性模數$E = 200$ GPa，彈性剪模數 $G = 80$ GPa，三個黏貼於平板面上的應變規(A、B、以及 C)所量得之應變分別為100μ、250μ以及100μ。試問此平板在 xy 面上 (1)所受之正向應力σ_x與σ_y以及剪應力τ_{xy}之大小 (9 分)，(2)主應變ε_1與ε_2之大小 (6 分)，(3)主應變元素之方向與變形圖 (5 分)。（$\mu = 10^{-6}$）



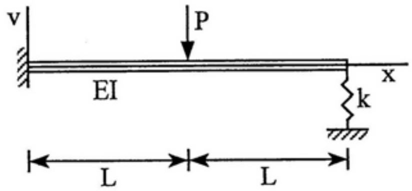
3. 一鋼軸半徑 15 mm，若黏貼於軸上的兩應變規量得應變為$\varepsilon_{x'} = -80\times10^{-6}$和$\varepsilon_{y'} = 80\times10^{-6}$，試求軸中的扭矩 T，及計算作用在 x 和 y 方向的應變。(20 分)（$E = 200$ GPa， $\nu = 0.3$）



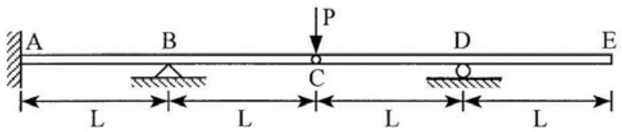
4. 如下圖所示，已知簡支梁的長度 L，材料楊氏係數 E，斷面慣性矩 I，且 EI 為常數。不考慮結構自重影響。試以面積−力矩法求出梁一端受彎矩 M_0 作用時 θ_A、θ_B、中點 $(x = L/2)$ 處變位 $v(L/2)$ 與最大變位 $v_{\max}$ 及其所在位置。(20 分)



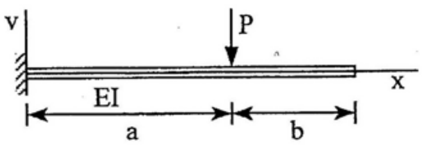
5. 一懸臂梁(cantilever beam)在自由端由一彈簧常數 $k = EI/L^3$ 之平移彈簧(translational spring)來支撐。如下圖所示給一集中力 P 於梁上。試求彈簧端的反力 R 的大小與集中力 P 處的撓度Δ。(20 分)



6. 有一連續梁 ABCDE 如下圖所示，A 點為固定端，B 點為鉸支承，C 點為鉸接，D 點為滾支承。此梁於 C 點受到一集中載重 P，如梁斷面彎矩勁度為 EI，求 A、B 及 D 點之反力（可包括彎矩）。並計算 C 點之位移、D 點之轉角及 E 點之位移。請註明反力、位移及轉角之方向。（20 分）



提示： $a + b = L$



$$v(x) = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x), \quad 0 \le x \le a,$$

$$v(x) = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a), \quad a \le x \le L.$$

7. 針對材料力學這門課的教學方式與如何學好這門課有何感想與建議? (10 分)

(參考公式)

平面應力轉換方程式

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

平面應變轉換方程式

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

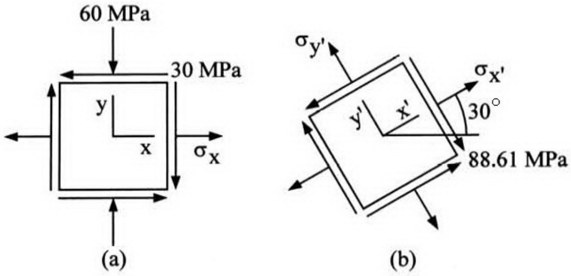
扭轉公式： $\tau = \dfrac{T\rho}{J}$，**彎曲公式：** $\sigma = -\dfrac{My}{I}$， **剪力公式：** $\tau = \dfrac{VQ}{It}$

應變−應力關係式： $\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$，$\varepsilon_y = \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

[參考解答]

1. 有一平面應力元素受應力如下圖(a)所示，當此元素逆時鐘方向旋轉30°後，其應力狀況如下圖(b)所示。請計算σ_x、$\sigma_{x'}$、$\sigma_{y'}$及此元素之主軸應力 (principal stresses) 與主軸應力方向，並將主軸應力標示於旋轉至主軸應力方向之應力元素上。 (20 分)　　(106 高考)



$$\tau_{x'y'}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta \quad \Rightarrow -88.61=-\frac{\sigma_x+60}{2}\sin 60^\circ+(-30)\cdot\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sigma_x=110\,(\text{MPa})$$

$$\sigma_{x'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_{x'}=\frac{110-60}{2}+\frac{110+60}{2}\cos 60^\circ+(-30)\cdot\sin 60^\circ \quad \Rightarrow \sigma_{x'}=41.52\,(\text{MPa})$$

又 $\sigma_x+\sigma_y=\sigma_{x'}+\sigma_{y'} \quad \Rightarrow \sigma_{y'}=110-60-41.52=8.48\,(\text{MPa})$

主應力：$\sigma_{1,2}=\dfrac{110-60}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{110+60}{2})^2+(-30)^2}$

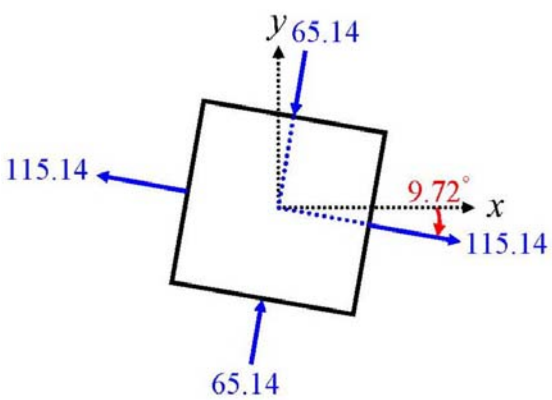
$\Rightarrow \sigma_1=115.14\,(\text{MPa})$ 與 $\sigma_2=-65.14\,(\text{MPa})$

主應力方向：$\tan 2\theta_P=\dfrac{\tau_{xy}}{\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}} \quad \Rightarrow \theta_P=\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$

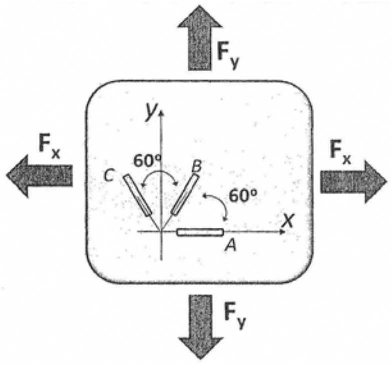
$$\Rightarrow \theta_P=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\cdot(-30)}{110+60}$$

$$\Rightarrow \theta_P=-0.1696\,(\text{rad})=-9.72^\circ \text{ 或 } 80.28^\circ$$

由應力轉換公式可知 $\theta_P=-9.72^\circ$ 對應到 $\sigma_1=115.14\,(\text{MPa})$



2. 一線彈性材料所製成之均質平板，因受到 x 與 y 方向上力量$\mathbf{F}_x$與$\mathbf{F}_y$之作用，使其處於均勻之平面應力狀態。已知平板之彈性模數$E = 200\ \text{GPa}$，彈性剪模數 $G = 80\ \text{GPa}$，三個黏貼於平板面上的應變規(A、B、以及 C)所量得之應變分別為100μ、250μ以及100μ。試問此平板在 xy 面上 (1)所受之正向應力σ_x與σ_y以及剪應力τ_{xy}之大小 (9 分)，(2)主應變ε_1與ε_2之大小 (6 分)，(3)主應變元素之方向與變形圖 (5 分)。（$\mu = 10^{-6}$） （102 中央土木）



(1) $\varepsilon_x = \varepsilon_A = 100\mu$ ...... (1)

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 120° + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 120° = 250\mu \quad \text{...... (2)}$$

$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 240° + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 240° = 100\mu \quad \text{...... (3)}$$

由(1)、(2)、(3)可得 $\varepsilon_y = 200\mu$，$\gamma_{xy} = 173.21\mu$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \nu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{200}{2 \cdot 80} - 1 = 0.25$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \Rightarrow 100\mu = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \text{...... (4)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad \Rightarrow 200\mu = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad \text{...... (5)}$$

由(4)、(5)可得 $\sigma_x = 160\mu \cdot E = 32\ \text{(MPa)}$，$\sigma_y = 240\mu \cdot E = 48\ \text{(MPa)}$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = 173.21\mu \cdot G = 13.8568\ \text{(MPa)}$$

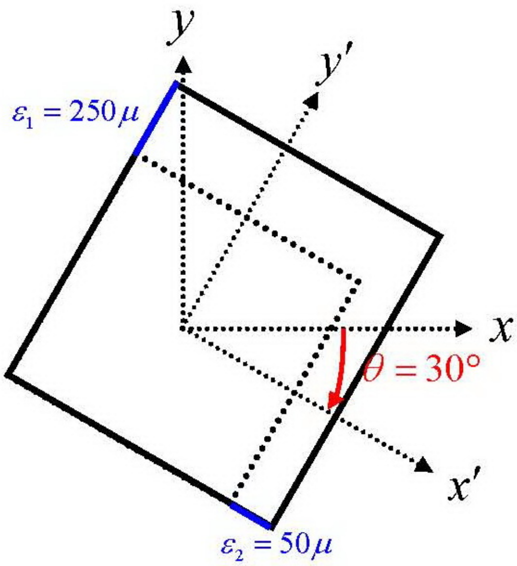
(2) $\varepsilon_{1,2} = \dfrac{100\mu + 200\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{100\mu - 200\mu}{2}\right)^2 + (173.21\mu)^2} \Rightarrow \varepsilon_1 = 250\mu$，$\varepsilon_2 = 50\mu$

(3) 主應變方向：$\tan 2\theta_P = \dfrac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad \Rightarrow \theta_P = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$

$$\Rightarrow \theta_P = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{173.21\mu}{100\mu - 200\mu}$$

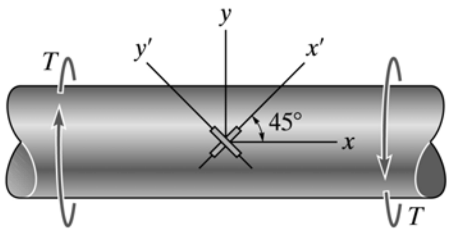
$$\Rightarrow \theta_P = -0.5236\ \text{(rad)} = -30° \ \text{或}\ 60°$$

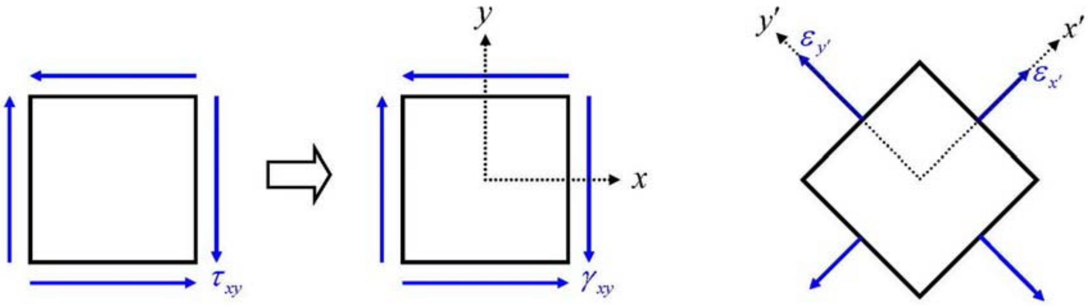
由應變轉換公式可知 $\theta_P = -30°$ 對應到 $\varepsilon_2 = 50\mu$



y
y'
$\varepsilon_1 = 250\mu$
x
$\theta = 30°$
x'
$\varepsilon_2 = 50\mu$

3. 一鋼軸半徑 15 mm，若黏貼於軸上的兩應變規量得應變為 $\varepsilon_{x'} = -80\times10^{-6}$ 和 $\varepsilon_{y'} = 80\times10^{-6}$，試求軸中的扭矩 T，及計算作用在 x 和 y 方向的應變。(20 分)（$E = 200$ GPa， $\nu = 0.3$）





$$\tau_{xy} = \frac{T\cdot c}{J} = G\cdot\gamma_{xy} \quad \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{T\cdot c}{J\cdot G}$$

又此為純剪狀態，即 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$

由應變轉換公式可知 $\varepsilon_{x'} = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$ 且 $\theta = 45°$

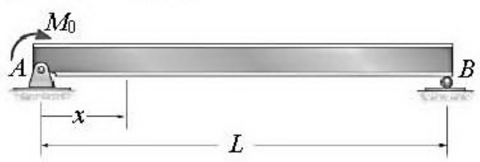
$$\Rightarrow \gamma_{xy} = -160\times10^{-6}$$

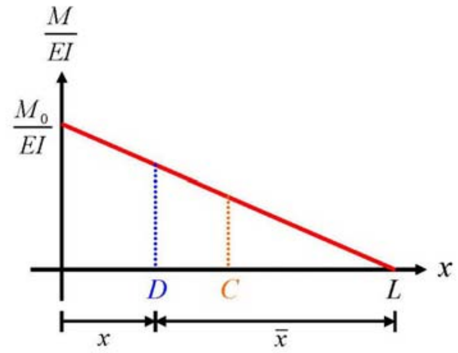
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0.3)} = 76.92\ (\text{GPa})$$

$$\therefore \quad \gamma_{xy} = \frac{T\cdot 15\cdot 10^{-3}}{\frac{\pi}{2}\cdot 15^4\cdot 10^{-12}\cdot 76.92\cdot 10^9} = 160\cdot 10^{-6}$$

$$\Rightarrow T = 65.25\ (\text{N}\cdot\text{m})$$

4. 如下圖所示，已知簡支梁的長度 L，材料楊氏係數 E，斷面慣性矩 I，且 EI 為常數。不考慮結構自重影響。試以面積−力矩法求出梁一端受彎矩 M_0 作用時 θ_A 、θ_B 、中點 $(x=L/2)$ 處變位 $v(L/2)$ 與最大變位 $v_{\max}$ 及其所在位置。(20 分）





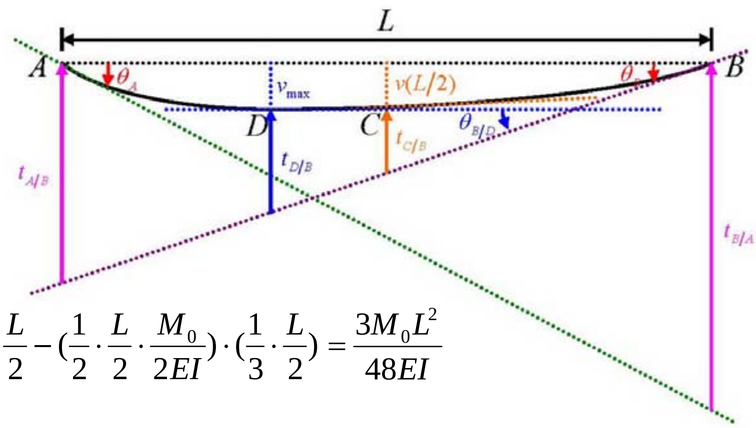
$$t_{A/B}=(\frac{1}{2}\cdot L\cdot\frac{M_0}{EI})\cdot\frac{1}{3}L=\frac{M_0L^2}{6EI}$$

$$t_{B/A}=(\frac{1}{2}\cdot L\cdot\frac{M_0}{EI})\cdot\frac{2}{3}L=\frac{M_0L^2}{3EI}$$

$$|\theta_A|=\frac{|t_{B/A}|}{L}=\frac{M_0L}{3EI}$$

$\because$ θ_A 為順時鐘方向

$$\therefore\quad \theta_A=-\frac{M_0L}{3EI}$$



$$|\theta_B|=\frac{|t_{A/B}|}{L}=\frac{M_0L}{6EI}$$

$\because$ θ_B 為逆時鐘方向

$$\therefore\quad \theta_B=\frac{M_0L}{6EI}$$

$$v(\frac{L}{2})=\theta_B\cdot\frac{L}{2}-t_{C/B}=\frac{M_0L}{6EI}\cdot\frac{L}{2}-(\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{M_0}{2EI})\cdot(\frac{1}{3}\cdot\frac{L}{2})=\frac{3M_0L^2}{48EI}$$

$\because$ 在中點處位移向下

$$\therefore\quad v(\frac{L}{2})=-\frac{3M_0L^2}{48EI}$$

由圖可知 $\theta_{B/D}=\theta_B$ $\quad\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\bar{x}\cdot\frac{M_0}{EI}\cdot\frac{b}{L}=\frac{M_0L}{6EI}\quad\Rightarrow \bar{x}^2=\frac{L^2}{3}$

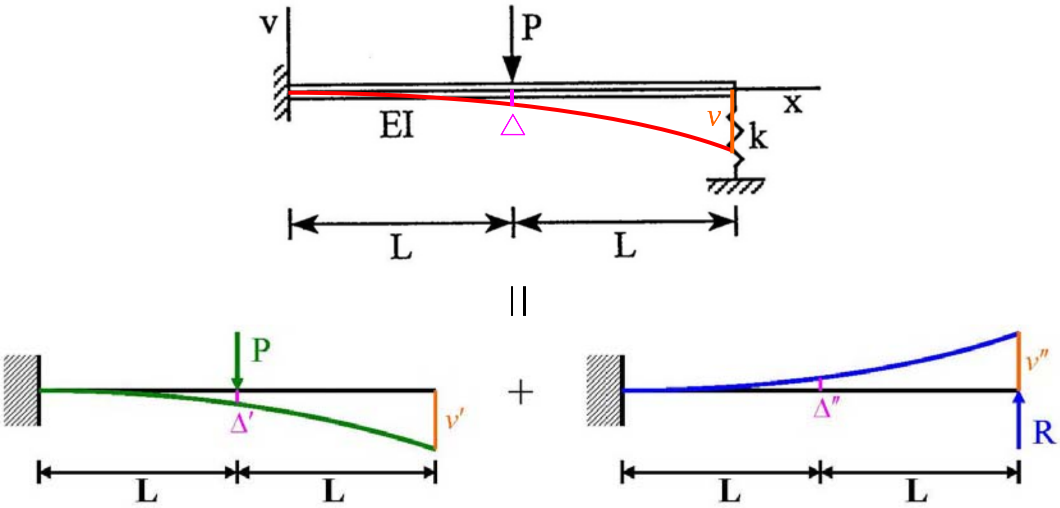
$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{L}{\sqrt{3}}=0.5774L$$

$$\therefore\quad x+\bar{x}=L\qquad\Rightarrow x=L-\frac{L}{\sqrt{3}}=0.4226L$$

$$v_{\max}=\theta_B\cdot\bar{x}-t_{D/B}=\frac{M_0L}{6EI}\cdot\frac{L}{\sqrt{3}}-(\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{\sqrt{3}}\cdot\frac{M_0}{EI}\frac{1}{\sqrt{3}})\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{3}}\frac{M_0L^2}{EI}-\frac{1}{18\sqrt{3}}\frac{M_0L^2}{EI}=\frac{1}{9\sqrt{3}}\frac{M_0L^2}{EI}$$

5. 一懸臂梁(cantilever beam)在自由端由一彈簧常數 $k = EI/L^3$ 之平移彈簧(translational spring)來支撐。如下圖所示給一集中力 P 於梁上。試求彈簧端的反力 R 的大小與集中力 P 處的撓度Δ。(20 分)　　（109 成大土木）



設 $a = L$, $b = L$

由提示公式 $v(x) = -\dfrac{Px^2}{6EI}(3a - x)$ ，令 $x = L$ 可得 $\Delta' = v(L) = -\dfrac{PL^3}{3EI}$

由提示公式 $v(x) = -\dfrac{Pa^2}{6EI}(3x - a)$ ，令 $x = 2L$ 可得 $v' = v(2L) = -\dfrac{5PL^3}{6EI}$

設 $a = 2L$

由提示公式 $v(x) = \dfrac{Px^2}{6EI}(3a - x)$ ，令 $x = L$ 可得 $\Delta'' = v(L) = \dfrac{5RL^3}{6EI}$

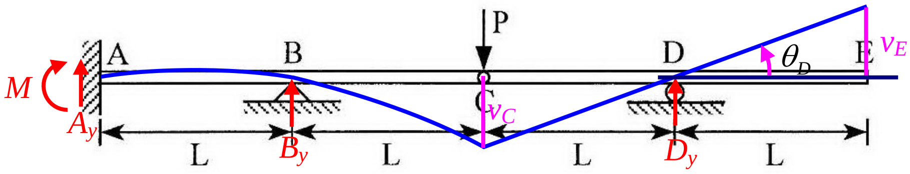
由提示公式 $v(x) = \dfrac{Px^2}{6EI}(3a - x)$ ，令 $x = 2L$ 可得 $v'' = v(2L) = \dfrac{8RL^3}{3EI}$

$v = v' + v''$

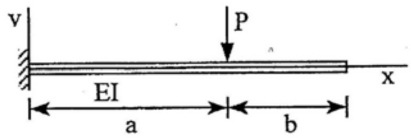
$$-\frac{R}{k} = -\frac{5PL^3}{6EI} + \frac{8RL^3}{3EI} \quad \Rightarrow -\frac{RL^3}{EI} = -\frac{5PL^3}{6EI} + \frac{8RL^3}{3EI} \quad \Rightarrow R = \frac{5P}{22} \ (\text{壓})$$

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' = -\frac{PL^3}{3EI} + \frac{5RL^3}{6EI} = -\frac{PL^3}{3EI} + \frac{5L^3}{6EI} \cdot \frac{5P}{22} = -\frac{19PL^3}{132EI} \quad \text{（負表示向下）}$$

6. 有一連續梁 ABCDE 如下圖所示，A 點為固定端，B 點為鉸支承，C 點為鉸接，D 點為滾支承。此梁於 C 點受到一集中載重 P，如梁斷面彎矩勁度為 EI，求 A、B 及 D 點之反力（可包括彎矩）。並計算 C 點之位移、D 點之轉角及 E 點之位移。請註明反力、位移及轉角之方向。(20 分)(113 地特三等)

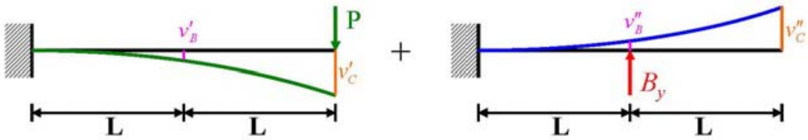


提示： a + b = L



$$v(x) = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x), \quad 0 \le x \le a,$$

$$v(x) = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a), \quad a \le x \le L.$$



設 $a = 2L$

由提示公式 $v(x) = -\dfrac{Px^2}{6EI}(3a - x)$，令 $x = L$ 可得 $v'_B = v(L) = -\dfrac{5PL^3}{6EI}$

由提示公式 $v(x) = -\dfrac{Px^2}{6EI}(3a - x)$，令 $x = 2L$ 可得 $v'_C = v(2L) = -\dfrac{8PL^3}{3EI}$

設 $a = L, \ b = L$

由提示公式 $v(x) = \dfrac{Px^2}{6EI}(3a - x)$，令 $x = L$ 可得 $v''_B = v(L) = \dfrac{B_y L^3}{3EI}$

由提示公式 $v(x) = \dfrac{Pa^2}{6EI}(3x - a)$，令 $x = 2L$ 可得 $v''_C = v(2L) = \dfrac{5B_y L^3}{6EI}$

又 B 點為滾支承，即 $v_B = v'_B + v''_B = 0 \Rightarrow -\dfrac{5PL^3}{6EI} + \dfrac{B_y L^3}{3EI} = 0 \Rightarrow B_y = \dfrac{5}{2}P$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow A_y + B_y = P \quad \Rightarrow A_y = -\frac{3}{2}P$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow M - B_y \cdot L + P \cdot 2L = 0 \quad \Rightarrow M = \frac{1}{2}PL$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow D_y = 0$$

C 點位移： $v_C = v'_C + v''_C = -\dfrac{8PL^3}{3EI} + \dfrac{5B_y L^3}{6EI} = -\dfrac{7PL^3}{12EI}$ （負表示向下）

E 點位移： $v_E = -v_C = \dfrac{7PL^3}{12EI}$ （負表示向下）

D 點轉角： $\theta_D = \dfrac{v_E}{L} = \dfrac{7PL^2}{12EI}$ （逆時鐘方向）