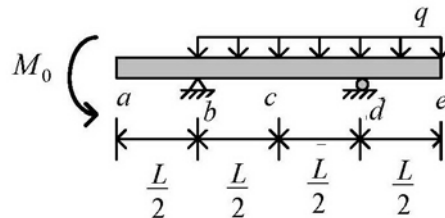
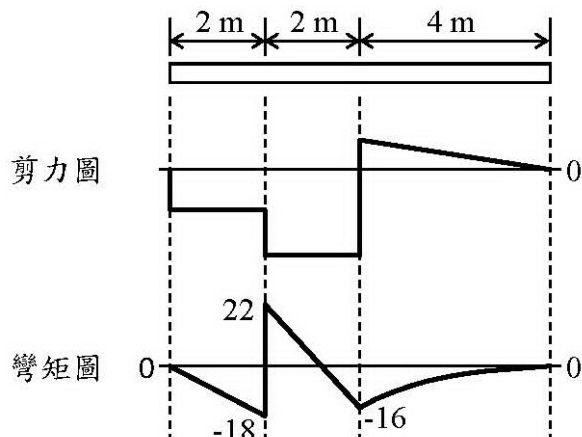
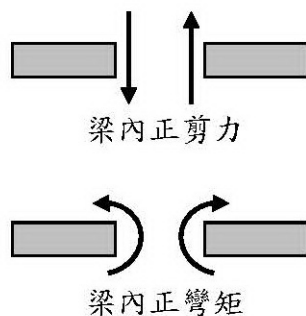


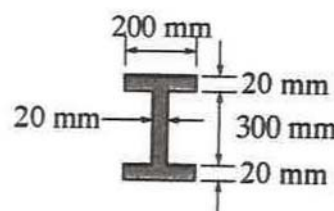
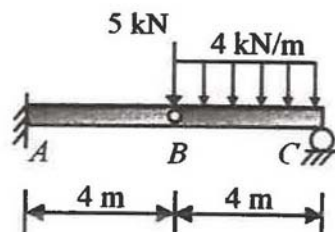
1. 如圖所示之梁，梁長 $2L$ ，梁上 $be$ 段受均佈載重 $q$ 作用，梁之 $a$ 端則受彎矩 $M_0$ 作用，今已知在均佈載重 $q$ 及彎矩 $M_0$ 作用下，梁跨度中央 $c$ 處之曲率(curvature)為零，試求出彎矩 $M_0$ 的大小(彎矩 $M_0$ 請以均佈載重 $q$ 及 $L$ 表示)，並繪出此梁之剪力圖及彎矩圖。(15分)



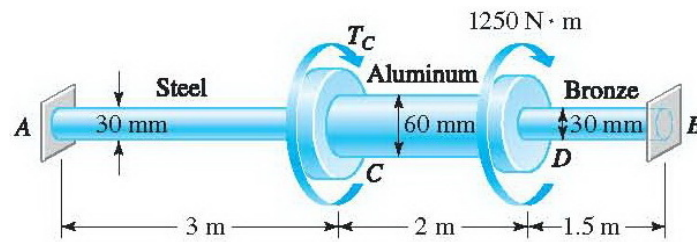
2. 一水平梁承受若干垂直力與平面內力矩，梁斷面內正值之剪力與彎矩定義如下左圖，其剪力圖(單位:kN)與彎矩圖(單位:kN·m)示意如下右圖，試完成剪力圖並推估此梁之所有受力與力矩。(15分)



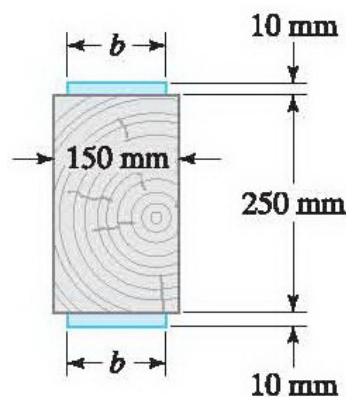
3. 一組合梁(compound beam)之長度、外力載重以及斷面尺寸如下圖所示，其中 $AB$ 桿件與 $BC$ 桿件在 $B$ 點鉸接， $AB$ 桿件左端為固定端， $BC$ 桿件右端為滾支承。試回答下列問題：
- (1) 繪出此組合梁的剪力圖與彎矩圖(須清楚標示各轉折點之值)。(10分)
  - (2) 梁的最大彎曲應力為多少?(5分)
  - (3) 梁的最大剪應力為多少?(5分)
  - (4) 若梁的降伏應力 $\sigma_y$ 為200 MPa，降伏剪應力 $\tau_y$ 為120 MPa，如下左圖中的集中載重由既有的5 kN慢慢增加，在梁不發生任何降伏的前提下，集中載重最大可增加至多少?(10分)



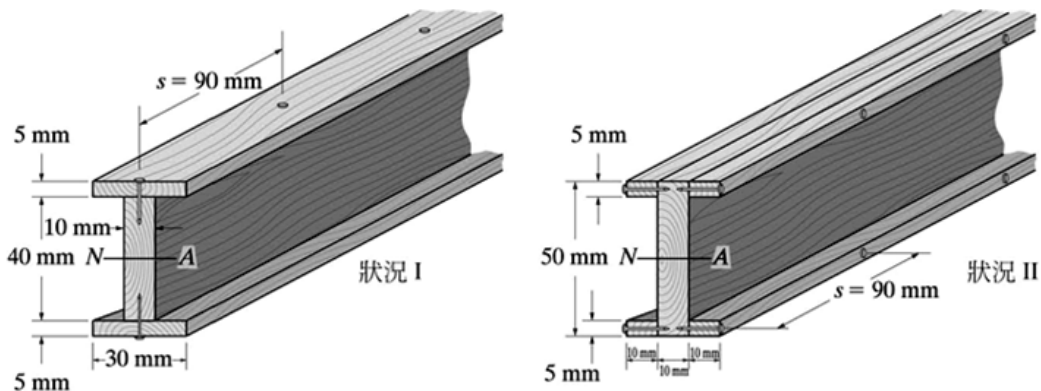
4. 鋼(Steel)、鋁(Aluminum)與青銅(Bronze)區段組成的複合軸承受如下圖所示兩扭矩。若  $T_C = 1250 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，試求各材料的最大剪應力。已知鋼、鋁與青銅的剛性模數分別為  $80 \text{ GPa}$ 、 $30 \text{ GPa}$  和  $35 \text{ GPa}$ 。(20 分)



5. 木樑(wood)在底和頂端以寬度  $b$  的鋼板(steel)強化。若木材的容許應力為  $10 \text{ MPa}$ ，鋼為  $120 \text{ MPa}$  且彈性模數比為  $E_{st}/E_{wd} = 15$ ，試求能承受  $40 \text{ kN} \cdot \text{m}$  彎矩的最小寬度  $b$ 。(20 分)

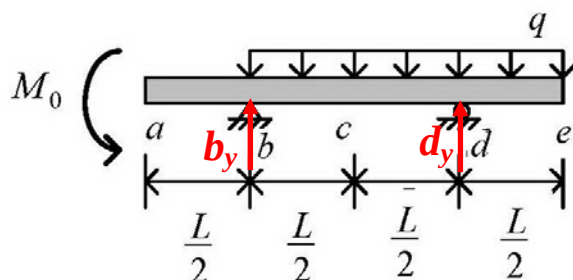


6. 一樑係由一具剪力強度  $40 \text{ N}$  之釘子組成，如下圖所示狀況 I 或狀況 II。若各釘距均為  $90 \text{ mm}$ ，試求各狀況可支承之最大垂直剪力。(20 分)



[參考解答]

1. 如圖所示之梁，梁長 $2L$ ，梁上 $be$ 段受均佈載重 $q$ 作用，梁之 $a$ 端則受彎矩 $M_0$ 作用，今已知在均佈載重 $q$ 及彎矩 $M_0$ 作用下，梁跨度中央 $c$ 處之曲率(curvature)為零，試求出彎矩 $M_0$ 的大小(彎矩 $M_0$ 請以均佈載重 $q$ 及 $L$ 表示)，並繪出此梁之剪力圖及彎矩圖。(15分) (103地特三等)

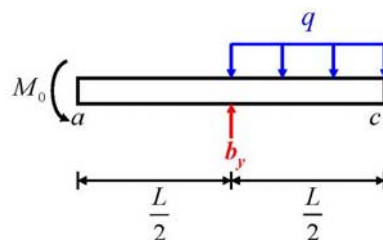


$$\sum M_b = 0 \Rightarrow M_0 + d_y \cdot 4 - (q \cdot \frac{3L}{2}) \cdot \frac{3L}{2} = 0 \Rightarrow d_y = \frac{9}{8}qL - \frac{M_0}{L}$$

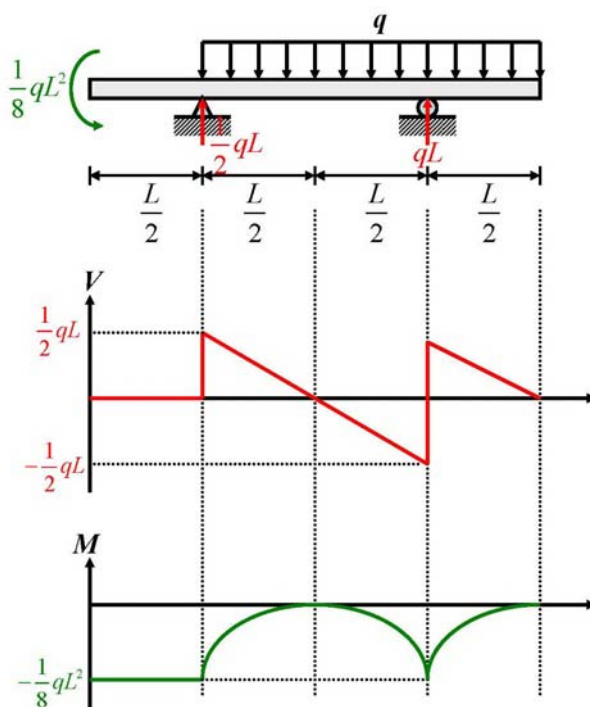
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow b_y + d_y - q \cdot \frac{3L}{2} = 0 \Rightarrow b_y = \frac{3}{8}qL + \frac{M_0}{L}$$

又中央 $c$ 處之曲率為零，表示在該點彎矩為零，故取 $ac$ 段自由體圖

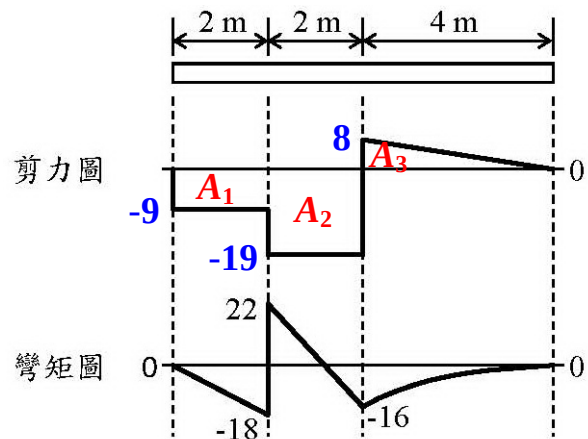
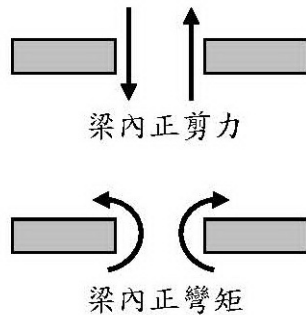
$$\begin{aligned} \sum M_c = 0 &\Rightarrow M_0 + (q \cdot \frac{L}{2}) \cdot \frac{L}{4} - b_y \cdot \frac{L}{2} = 0 \\ &\Rightarrow M_0 + \frac{1}{8}qL^2 - (\frac{3}{8}qL + \frac{M_0}{L}) \cdot \frac{L}{2} = 0 \\ &\Rightarrow M_0 = \frac{1}{8}qL^2 \end{aligned}$$



$$\therefore d_y = \frac{9}{8}qL - \frac{M_0}{L} = qL, \quad b_y = \frac{3}{8}qL + \frac{M_0}{L} = \frac{1}{2}qL$$



2. 一水平梁承受若干垂直力與平面內力矩，梁斷面內正值之剪力與彎矩定義如下左圖，其剪力圖（單位:kN）與彎矩圖（單位:kN·m）示意如下右圖，試完成剪力圖並推估此梁之所有受力與力矩。（15分）（113高考）



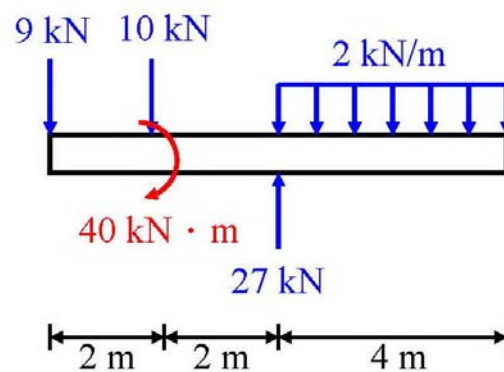
由彎矩圖推估剪力

$$A_1 = -18 \Rightarrow V_1 = -9 \text{ (kN)}$$

$$A_2 = -16 - 22 = -38 \Rightarrow V_2 = -19 \text{ (kN)}$$

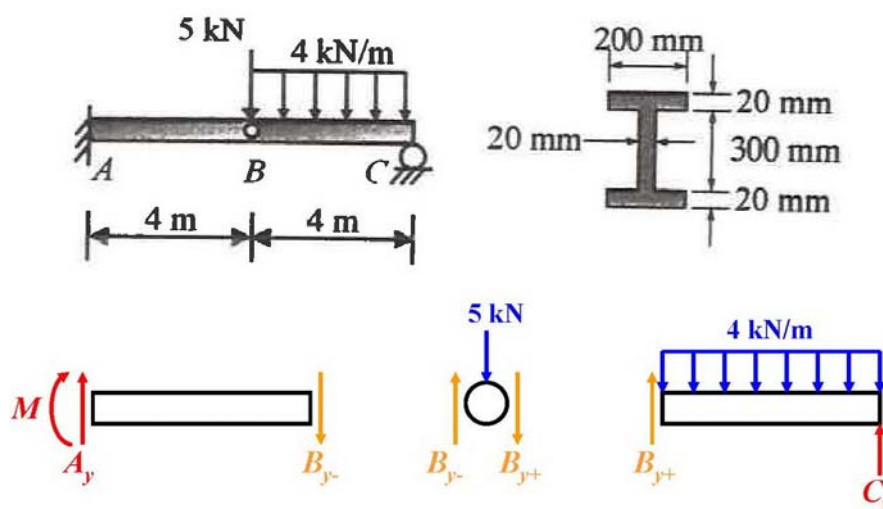
$$A_3 = 0 - 16 = 16 \Rightarrow V_3 = 8 \text{ (kN)}$$

受力圖如下：



3. 一組合梁(compound beam)之長度、外力載重以及斷面尺寸如下圖所示，其中 AB 桿件與 BC 桿件在 B 點鉸接，AB 桿件左端為固定端，BC 桿件右端為滾支承。試回答下列問題： (112 台科大營建)

- (1) 繪出此組合梁的剪力圖與彎矩圖(須清楚標示各轉折點之值)。(10 分)
- (2) 梁的最大彎曲應力為多少?(5 分)
- (3) 梁的最大剪應力為多少?(5 分)
- (4) 若梁的降伏應力  $\sigma_y$  為 200 MPa，降伏剪應力  $\tau_y$  為 120 MPa，如下左圖中的集中載重由既有的 5 kN 慢慢增加，在梁不發生任何降伏的前提下，集中載重最大可增加至多少?(10 分)



$$(1) BC \text{ 段: } \sum M_B = 0 \Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 2 - C_y \cdot 4 = 0 \Rightarrow C_y = 8 \text{ (kN)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 4 \cdot 4 - C_y - B_{y+} = 0 \Rightarrow B_{y+} = 8 \text{ (kN)}$$

$$\text{節點 } B: B_{y-} - B_{y+} - 5 = 0 \Rightarrow B_{y-} = 13 \text{ (kN)}$$

$$AB \text{ 段: } \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = B_{y-} = 13 \text{ (kN)}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M = -B_{y-} \cdot 4 = -52 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$$

$$(2) I = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 340^3 - \frac{1}{12} \cdot 180 \cdot 300^3$$

$$= 250 \cdot 10^6 \text{ (mm}^4\text{)} = 250 \cdot 10^{-6} \text{ (m}^4\text{)}$$

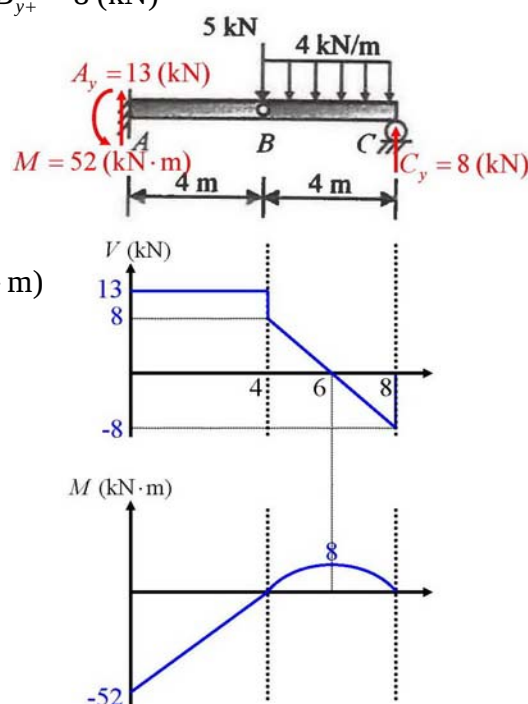
$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot c}{I} = \frac{52 \cdot 10^3 \cdot 170 \cdot 10^{-3}}{250 \cdot 10^{-6}}$$

$$= 35.36 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 35.36 \text{ (MPa)}$$

$$(3) Q = 200 \cdot 20 \cdot 160 + 150 \cdot 20 \cdot 75$$

$$= 0.865 \cdot 10^6 \text{ (mm}^3\text{)} = 0.865 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^3\text{)}$$

$$\tau_{\max} = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t} = \frac{13 \cdot 10^3 \cdot 0.865 \cdot 10^{-3}}{250 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 2.249 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 2.249 \text{ (MPa)}$$



(4) 假設集中力最大增加到  $P$  kN，由剪力圖可知最大剪力為  $(P+8)$  kN

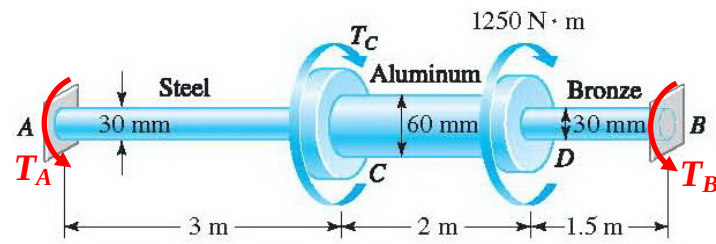
∴ 最大彎矩為  $4(P+8)$  kN·m

$$\sigma_y = \frac{M \cdot c}{I} \Rightarrow 200 \cdot 10^{-6} = \frac{4(P+8) \cdot 10^3 \cdot 170 \cdot 10^{-3}}{250 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow P = 65.53 \text{ (kN)}$$

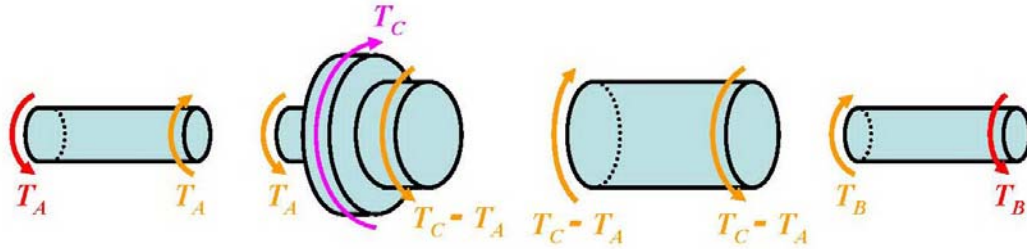
$$\tau_y = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t} \Rightarrow 120 \cdot 10^6 = \frac{(P+8) \cdot 10^3 \cdot 0.865 \cdot 10^{-3}}{250 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow P = 685.64 \text{ (kN)}$$

∴  $P$  最大可增至 65.53 kN

4. 鋼(Steel)、鋁(Aluminum)與青銅(Bronze)區段組成的複合軸承受如下圖所示兩扭矩。若  $T_C = 1250 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，試求各材料的最大剪應力。已知鋼、鋁與青銅的剛性模數分別為  $80 \text{ GPa}$ 、 $30 \text{ GPa}$  和  $35 \text{ GPa}$ 。(20 分)



$$\sum M_x = 0 \Rightarrow T_A + T_B = 2500 \dots (1)$$



此為一度靜不定且兩端固定於牆上，故可知相容方程為  $\phi_{A/B} = 0$

$$-\frac{T_A \cdot 3}{\frac{\pi}{2} \cdot 15^4 \cdot 10^{-12} \cdot 80 \cdot 10^9} + \frac{(1250 - T_A) \cdot 2}{\frac{\pi}{2} \cdot 30^4 \cdot 10^{-12} \cdot 30 \cdot 10^9} + \frac{T_B \cdot 1.5}{\frac{\pi}{2} \cdot 15^4 \cdot 10^{-12} \cdot 35 \cdot 10^9} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12} T_A - \frac{3}{7} T_B = \frac{625}{12} \dots (2)$$

將(1)代入(2)可得  $\frac{5}{12} T_A - \frac{3}{7} (2500 - T_A) = \frac{625}{12} \Rightarrow T_A = \frac{94375}{71} = 1329.23 \text{ (N} \cdot \text{m)}$

由(1)可得  $T_B = 1170.77 \text{ (N} \cdot \text{m)}$

$\therefore T_{st} = T_A = 1329.23 \text{ (N} \cdot \text{m)}$

$T_{al} = 1250 - T_A = -79.23 \text{ (N} \cdot \text{m)}$

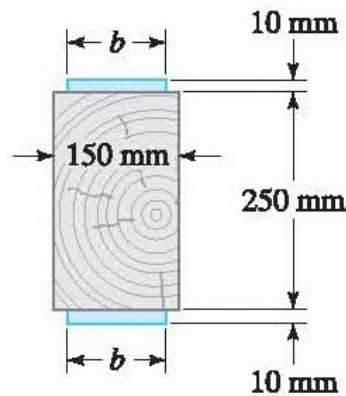
$T_{br} = T_B = 1170.77 \text{ (N} \cdot \text{m)}$

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot c}{J} \Rightarrow (\tau_{st})_{\max} = \frac{1170.77 \cdot 15 \cdot 10^{-3}}{\frac{\pi}{2} \cdot 15^4 \cdot 10^{-12}} = 232.31 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 232.31 \text{ (MPa)}$$

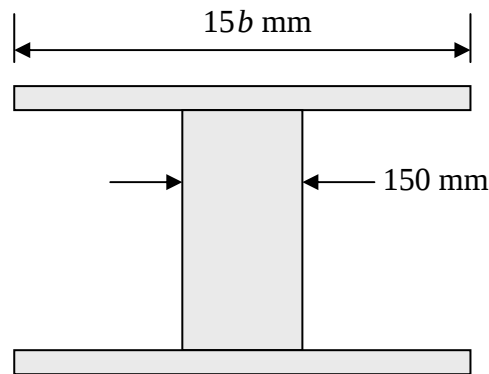
$$(\tau_{al})_{\max} = \frac{-79.23 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{\frac{\pi}{2} \cdot 30^4 \cdot 10^{-12}} = -1.87 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = -1.87 \text{ (MPa)}$$

$$(\tau_{br})_{\max} = \frac{1170.77 \cdot 15 \cdot 10^{-3}}{\frac{\pi}{2} \cdot 15^4 \cdot 10^{-12}} = 220.84 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 220.84 \text{ (MPa)}$$

5. 木樑(wood)在底和頂端以寬度  $b$  的鋼板(steel)強化。若木材的容許應力為 10 MPa，鋼為 120 MPa 且彈性模數比為  $E_{st}/E_{wd} = 15$ ，試求能承受 40 kN·m 彎矩的最小寬度  $b$ 。(20 分)



將鋼轉換成木頭，可知轉換因子  $n = \frac{E_{st}}{E_{wd}} = 15$



$$I = \left[ \frac{1}{12} 15b \cdot 10^3 + (15b \cdot 10) \cdot 130^2 \right] \cdot 2 + \frac{1}{12} 150 \cdot 250^3$$

$$= (5.0725b + 195.3125) \cdot 10^6 \text{ (mm}^4\text{)}$$

$$= (5.0725b + 195.3125) \cdot 10^{-6} \text{ (m}^4\text{)}$$

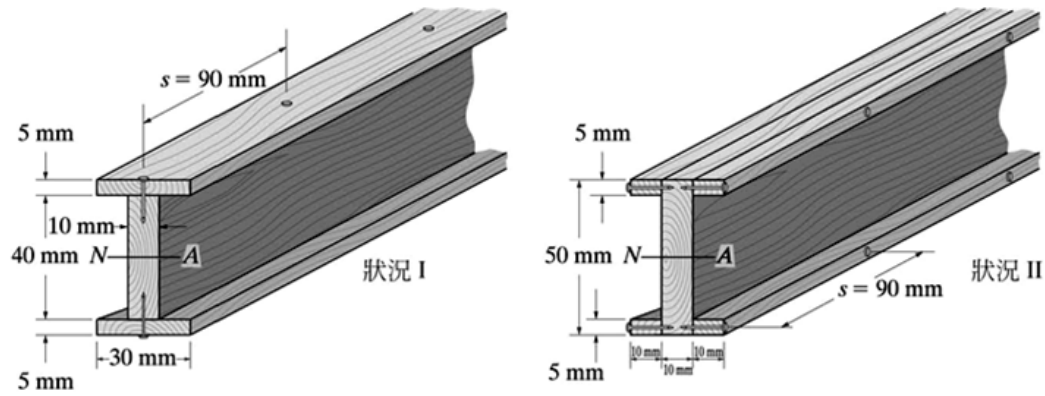
$$\sigma_{wd} = \frac{M c_{wd}}{I} \Rightarrow 10 \cdot 10^6 = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot (125 \cdot 10^{-3})}{(5.0725b + 195.3125) \cdot 10^{-6}} \Rightarrow b = 60.07 \text{ (mm)}$$

$$\sigma_{st} = n \sigma'_{st} = \frac{n M c_{st}}{I} \Rightarrow 120 \cdot 10^6 = \frac{15 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot (135 \cdot 10^{-3})}{(5.0725b + 195.3125) \cdot 10^{-6}}$$

$$\Rightarrow b = 94.57 \text{ (mm)}$$

$\therefore$  最小寬度  $b$  為 94.57 mm

6. 一樑係由一具剪力強度 40 N 之釘子組成，如下圖所示狀況 I 或狀況 II。若各釘距均為 90 mm，試求各狀況可支承之最大垂直剪力。（20 分）



$$I = \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 50^3 - \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 40^3 = 205833 \text{ (mm}^4\text{)}$$

狀況 I:

$$Q = 30 \cdot 5 \cdot 22.5 = 3375 \text{ (mm}^3\text{)}$$

$$q = \frac{F}{s} \Rightarrow \frac{VQ}{I} = \frac{F}{s} \Rightarrow \frac{V \cdot 3375}{205833} = \frac{40}{90} \Rightarrow V = 27.11 \text{ (N)}$$

狀況 II:

$$Q = 10 \cdot 5 \cdot 22.5 = 1125 \text{ (mm}^3\text{)}$$

$$q = \frac{F}{s} \Rightarrow \frac{VQ}{I} = \frac{F}{s} \Rightarrow \frac{V \cdot 1125}{205833} = \frac{40}{90} \Rightarrow V = 81.33 \text{ (N)}$$