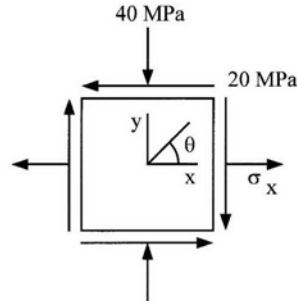
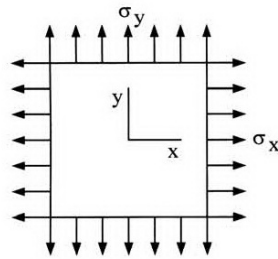


日期：2024 年 06 月 17 日 姓名：_____ 學號：_____

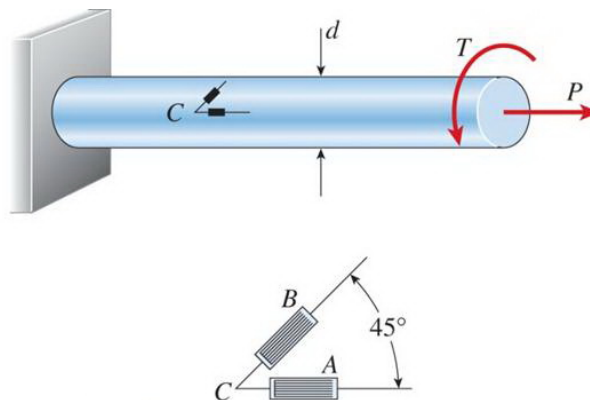
1. 有一平面應力元素受應力如下圖所示，如此元素之最大主軸應力 σ_1 為 10 MPa，請計算 σ_x 、最小主軸應力 σ_2 、最大剪應力 $\tau_{\max}$ 、最大主軸應力之方向及最小主軸應力之方向。(25%)



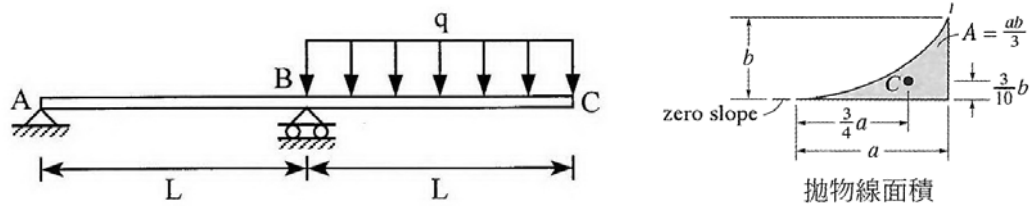
2. 有一均勻厚度之正方形板受到三軸應力 $\sigma_x = 40$ MPa， $\sigma_y = -20$ MPa， $\sigma_z = 0$ MPa，所產生之應變 $\epsilon_x = 23 \times 10^{-5}$ ， $\epsilon_y = -16 \times 10^{-5}$ 。試求此材料之彈性係數 E 、柏松比(Poisson's ratio) ν 、xy 面之最大剪應力 $(\tau_{xy})_{\max}$ 、yz 面之最大剪應力 $(\tau_{yz})_{\max}$ 及 xz 面之最大剪應力 $(\tau_{xz})_{\max}$ 。(25%)



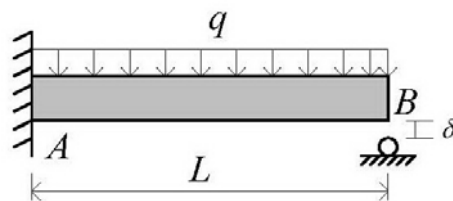
3. 一直徑 $d = 32$ mm 的實心圓桿受到一軸向力 P 及扭矩 T 作用，如下圖所示。應變規 A 及 B 裝在桿件表面上，得出讀數 $\epsilon_A = 140 \times 10^{-6}$ 及 $\epsilon_B = -60 \times 10^{-6}$ 。桿件由鋼材製成， $E = 210$ GPa 及 $\nu = 0.29$ 。
- (1) 求軸向力 P 及扭矩 T 。(10%)
- (2) 求桿件內的最大剪應變 $\gamma_{\max}$ 及最大剪應力 $\tau_{\max}$ 。(10%)



4. 下圖有一 ABC 梁 A 點為鉸之撐，B 點為滾之撐。梁為 BC 段受均佈載重 q ，試求 A 點及 B 點之反力(請註明作用之方向)、A 點之轉角(請註明轉角之方向)、C 點之轉角及位移(請註明轉角及位移之方向)。(25%)
(請以力矩-面積法計算)



5. 如下圖所示，梁 AB 為懸臂梁，梁長為 L ，梁之撓曲剛度為 EI ，梁承受均佈載重 q 作用，自由端 B 下方 δ 處有一滾支撐。
- (1) 考慮自由端 B 下方 δ 處，無滾支撐條件下，試求自由端 B 處之變位及自由端 B 處之傾斜角。(15%)
 - (2) 載重 q 作用下，已知自由端 B 已接觸到滾支撐，且梁變位曲線在自由端 B 之傾斜角維持水平，試求均佈載重 q 大小(均佈載重 q 請以 L , EI 及 δ 表示)。(10%)



- (1) 上完了一學期的材料力學，對於這門課在學習上有何心得或感想？(5%)
- (2) 對於老師的教學方式或是要如何協助同學們學習好這門課有何建議？(5%)

(參考公式)

平面應力轉換方程式

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

平面應變轉換方程式

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

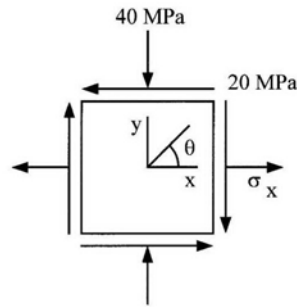
彎曲公式: $\sigma = -\frac{My}{I}$, 剪力公式: $\tau = \frac{VQ}{It}$, 剪力流: $q = \frac{VQ}{I}$

應變-應力關係式: $\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$, $\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

參考解答：

1. 有一平面應力元素受應力如下圖所示，如此元素之最大主軸應力 σ_1 為 10 MPa，請計算 σ_x 、最小主軸應力 σ_2 、最大剪應力 $\tau_{\max}$ 、最大主軸應力之方向及最小主軸應力之方向。(25%) (112 地特三等)



由圖可知 $\sigma_y = -40$ MPa， $\tau_{xy} = -20$ MPa

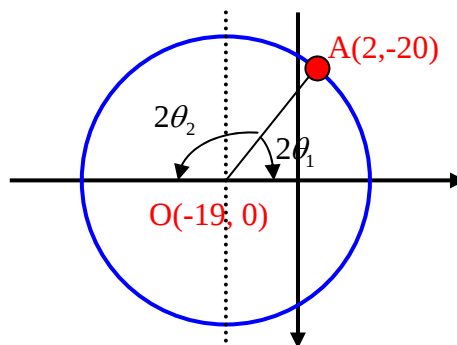
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \Rightarrow 10 = \frac{\sigma_x - 40}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + 40}{2}\right)^2 + 20^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = 2 \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \Rightarrow \sigma_2 = -48 \text{ (MPa)}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = 29 \text{ (MPa)}$$

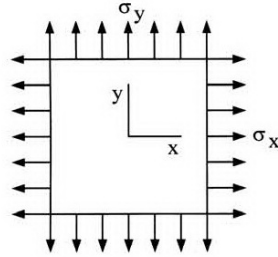
$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -19 \text{ (MPa)}$$



$$2\theta_1 = \tan^{-1} \frac{20}{21} \Rightarrow \theta_1 = \tan^{-1} \frac{20}{21} = 0.3805 \text{ (rad)} = 21.8^\circ \text{ (順)}$$

$$2\theta_1 + 2\theta_2 = 180^\circ \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \Rightarrow \theta_2 = 68.2^\circ \text{ (逆)}$$

2. 有一均勻厚度之正方形板受到三軸應力 $\sigma_x = 40 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$, $\sigma_z = 0 \text{ MPa}$, 所產生之應變 $\varepsilon_x = 23 \times 10^{-5}$, $\varepsilon_y = -16 \times 10^{-5}$ 。試求此材料之彈性係數 E 、柏松比(Poisson's ratio) ν 、 xy 面之最大剪應力 $(\tau_{xy})_{\max}$ 、 yz 面之最大剪應力 $(\tau_{yz})_{\max}$ 及 xz 面之最大剪應力 $(\tau_{xz})_{\max}$ 。(25%) (105 結構技師)



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \Rightarrow 23 \times 10^{-5} = \frac{1}{E}[40 + 20\nu] \cdot 10^6 \quad \dots(1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \Rightarrow -16 \times 10^{-5} = \frac{1}{E}[-20 - 40\nu] \cdot 10^6 \quad \dots(2)$$

$$(1) \times 2 + (2) \text{ 可得 } 30 \times 10^{-5} = \frac{60 \times 10^6}{E}$$

$$\Rightarrow E = 200 \times 10^9 \text{ (MPa)} = 200 \text{ (GPa)}$$

代回(1)可得 $\nu = 0.3$

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 30 \text{ (MPa)}$$

$$(\tau_{yz})_{\max} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} = 10 \text{ (MPa)}$$

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} = 20 \text{ (MPa)}$$

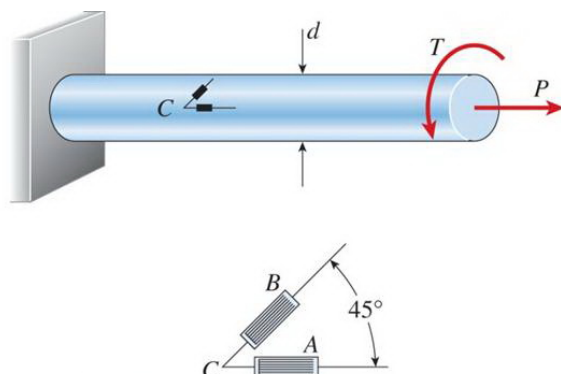
3. 一直徑 $d = 32 \text{ mm}$ 的實心圓桿受到一軸向力 P 及扭矩 T 作用，如下圖所示。

應變規 A 及 B 裝在桿件表面上，得出讀數 $\varepsilon_A = 140 \times 10^{-6}$ 及 $\varepsilon_B = -60 \times 10^{-6}$ 。

桿件由鋼材製成， $E = 210 \text{ GPa}$ 及 $\nu = 0.29$ 。

(1) 求軸向力 P 及扭矩 T 。(10%)

(2) 求桿件內的最大剪應變 $\gamma_{\max}$ 及最大剪應力 $\tau_{\max}$ 。(10%)



$$(1) \text{ 由 } \sigma_x = \frac{P}{A} \text{ 並且 } \sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \text{ 可知 } \frac{P}{A} = E \cdot \varepsilon_x$$

又由 A 應變規讀數 $\varepsilon_A = \varepsilon_x = 140 \cdot 10^{-6}$ 可得

$$\frac{P}{\pi \cdot \left(\frac{32}{2}\right)^2 \cdot 10^{-6}} = 210 \cdot 10^9 \cdot 140 \cdot 10^{-6} \Rightarrow P = 23644.88 \text{ (N)} = 23.64 \text{ (kN)}$$

$$\text{由 } \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = -\frac{\nu}{E}\sigma_x = -\nu \cdot \varepsilon_x = -40.60 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{由應變轉換公式可知 } \varepsilon_B = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow -60 \cdot 10^{-6} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 90^\circ + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = -219.40 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{又 } \tau = \frac{T\rho}{J} \text{ 且 } \tau = G\gamma_{xy} \text{ 可知 } \frac{T\rho}{J} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

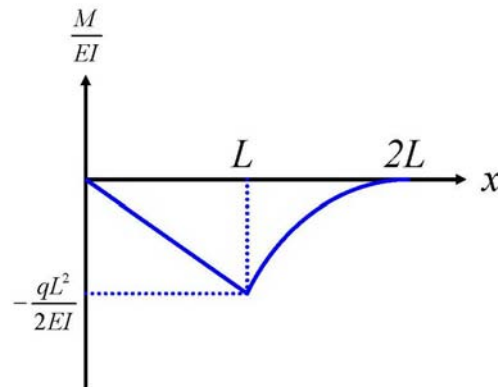
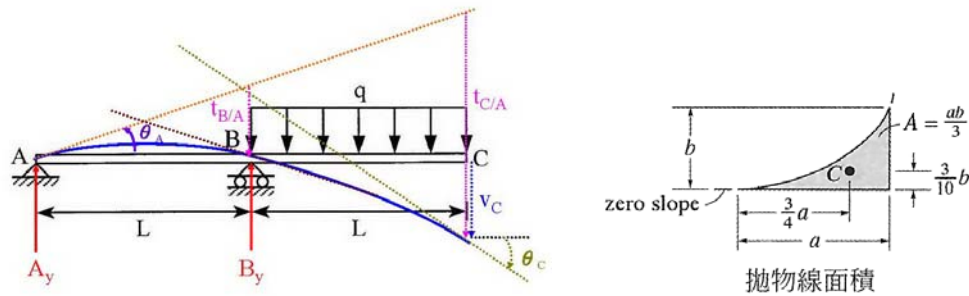
$$\Rightarrow T = \frac{\pi \left(\frac{32}{2}\right)^3 \cdot 10^{-9} \cdot 210 \cdot 10^9}{4(1+0.29)} \cdot (-219.40 \cdot 10^{-6}) = -114.90 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

(2) 由 $\varepsilon_x = 140 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_y = -40.60 \cdot 10^{-6}$, $\Rightarrow \gamma_{xy} = -219.40 \cdot 10^{-6}$ 可得

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = 142.09 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \gamma_{\max} = 284.18 \cdot 10^{-6}$$

$$\tau_{\max} = G\gamma_{\max} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{\max} = 23.13 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 23.13 \text{ (MPa)}$$

4. 下圖有一 ABC 梁 A 點為鉸之撐，B 點為滾之撐。梁為 BC 段受均佈載重 q ，試求 A 點及 B 點之反力(請註明作用之方向)、A 點之轉角(請註明轉角之方向)、C 點之轉角及位移(請註明轉角及位移之方向)。(25%)
(請以力矩-面積法計算)(112 地特三等)



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \cdot L + qL \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow A_y = -\frac{qL}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = \frac{3qL}{2}$$

$$t_{B/A} = \frac{1}{2} \left(-\frac{qL^2}{2EI} \right) \cdot L \cdot \frac{L}{3} = -\frac{qL^4}{12EI}$$

$$t_{C/A} = \frac{1}{2} \left(-\frac{qL^2}{2EI} \right) \cdot L \cdot \left(\frac{L}{3} + L \right) + \frac{1}{3} L \cdot \left(-\frac{qL^2}{2EI} \right) \cdot \frac{3L}{4} = -\frac{11qL^4}{24EI}$$

$$|v_C| = |t_{C/A}| - |2t_{B/A}| \Rightarrow |v_C| = \frac{7qL^4}{24EI}$$

$$\therefore v_C \text{ 向下} \quad \therefore v_C = -\frac{7qL^4}{24EI}$$

$$\theta_A \approx \tan \theta_A = \frac{\frac{qL^4}{12EI}}{L} = \frac{qL^3}{12EI} \quad (\text{逆時鐘方向})$$

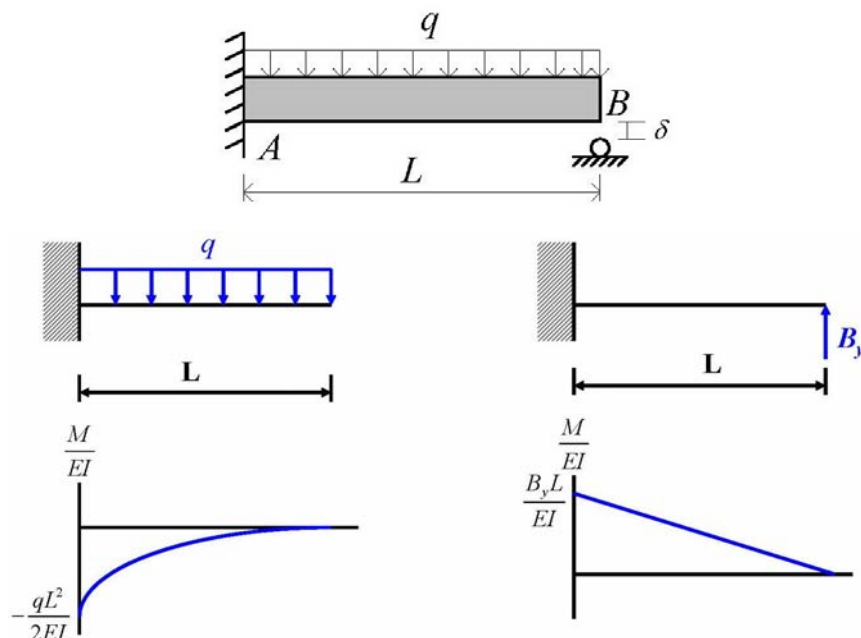
$$|\theta_C| = |\theta_{C/A}| - |\theta_A| \Rightarrow |\theta_C| = \left| \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{qL^2}{2EI} \right) \cdot L + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{qL^2}{2EI} \right) \cdot L \right| - \frac{qL^3}{12EI} = \frac{qL^3}{3EI}$$

$$\therefore \theta_C \text{ 為順時鐘方向} \quad \therefore \theta_C = -\frac{qL^3}{3EI}$$

5. 如下圖所示，梁 AB 為懸臂梁，梁長為 L ，梁之撓曲剛度為 EI ，梁承受均佈載重 q 作用，自由端 B 下方 δ 處有一滾支撐。

(1) 考慮自由端 B 下方 δ 處，無滾支撐條件下，試求自由端 B 處之變位及自由端 B 處之傾斜角。(15%)

(2) 載重 q 作用下，已知自由端 B 已接觸到滾支撐，且梁變位曲線在自由端 B 之傾斜角維持水平，試求均佈載重 q 大小(均佈載重 q 請以 L , EI 及 δ 表示)。(10%) (103 地特三等)



(1) B 下方無支撐

$$v_B = t_{B/A} = \frac{1}{3} \cdot L \cdot \left(-\frac{qL^2}{2EI}\right) \cdot \frac{3L}{4} = -\frac{qL^4}{8EI} \quad (\text{負表示向下位移})$$

$$\theta_B = \theta_{B/A} = \frac{1}{3} \cdot L \cdot \left(-\frac{qL^2}{2EI}\right) = -\frac{qL^3}{6EI} \quad (\text{負表示順時鐘方向轉動})$$

(2) B 下方有支撐

$$v'_B = -\frac{qL^4}{8EI}, \quad \theta'_B = -\frac{qL^3}{6EI}$$

$$v''_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_y L}{EI} \cdot L \cdot \frac{2L}{3} = \frac{B_y L^3}{3EI}$$

$$\theta'_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_y L}{EI} \cdot L = \frac{B_y L^2}{2EI}$$

$\therefore$ 梁變位曲線在自由端 B 之傾斜角維持水平，即 $\theta_B = 0$

$$\therefore \theta_B = \theta'_B + \theta''_B = -\frac{qL^3}{6EI} + \frac{B_y L^2}{2EI} = 0 \quad \Rightarrow B_y = \frac{qL}{3}$$

$$v_B = v'_B + v''_B = -\frac{qL^4}{8EI} + \frac{B_y L^3}{3EI} = -\delta \quad \Rightarrow q = \frac{72EI\delta}{L^4}$$