國立臺灣海洋大學河海工程學系 2024 材料力學 2A 班第一次大考參考解答

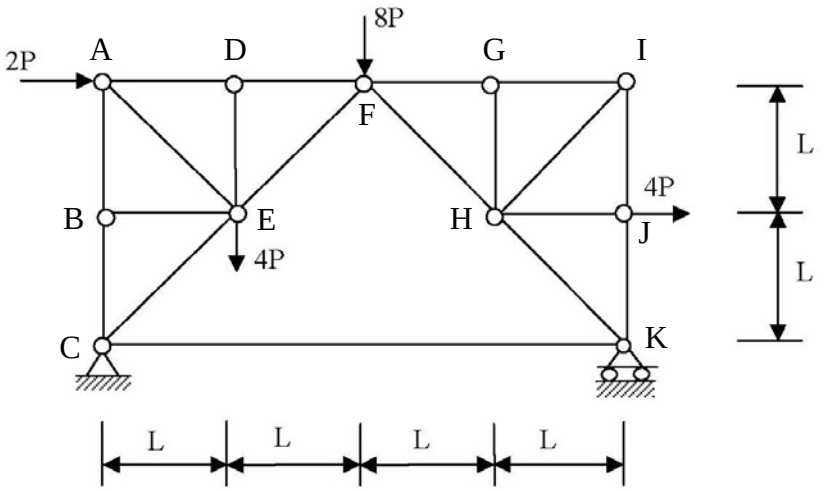
日期：2024 年 04 月 11 日　　姓名：＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿

1. 如下圖所示之桁架，試問:

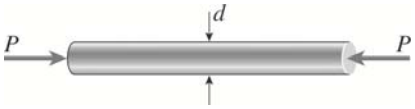
(1) 何者為零力桿件。 (6%)

(2) 何者為最大壓力桿件，其大小為何? (4%)
何者為最大拉力桿件，其大小為何? (4%)

(3) 若桿件截面積為 $\sqrt{2}\cdot 10^3\ \text{mm}^2$ 且桿件所能承受之最大拉或壓應力為 270 MPa ，則 P = ? (6%)



2. 用在大型吊車的高強度鋼桿，直徑為 $d = 50\ \text{mm}$（如下圖所示）。鋼的彈性模數 $E = 200\ \text{GPa}$ ，蒲松比 $\nu = 0.3$ 。因裕度所需，桿件的直徑在軸向壓力下限制為 50.025 mm ，求桿件的容許最大壓力 $P_{\max}$ 。 (20%)

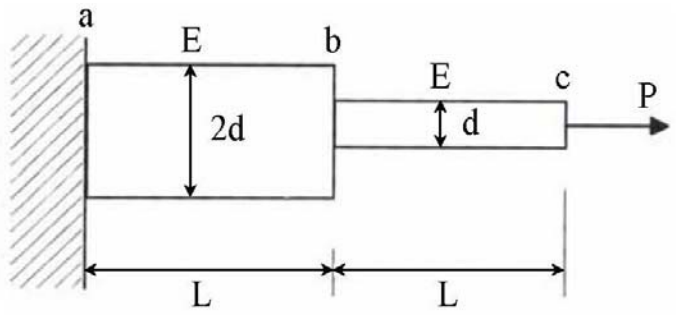


3. 如下圖所示，軸向受力圓桿，試求 P 力作用下

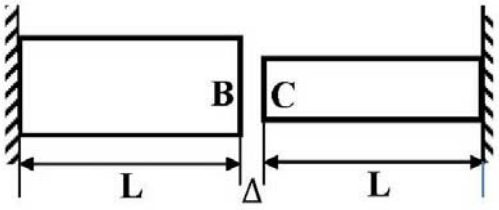
(1) 桿件內力　(2) b、c 兩點之位移。 (3) 總應變能。 (4) 應變能密度。

(5) 全桿整體勁度。

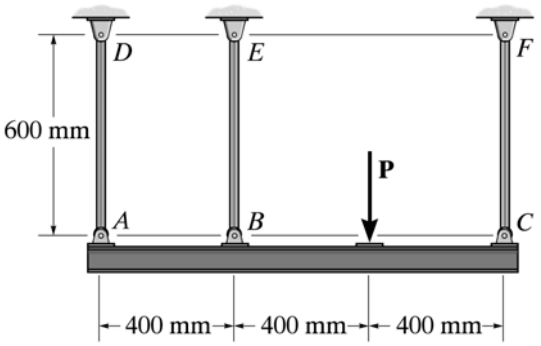
已知: $E = 200\ \text{GPa}$ 、 $d = 0.1\,m$ 、 $L = 2\,m$ 、 $P = 30\,kN$ 。 (20%)



4. 如下圖所示，兩桿的材料和長度相同，但截面積不相等(左桿為nA (n > 1)，右桿為 A)，他們之間有一縫隙Δ，當兩桿均勻升溫時，請分析他們剛好接觸和接觸以後，端面 B 和端面 C 的位移(彈性模數 E，熱膨脹係數α，溫度為 T)。 (20%)



5. 剛性樑由三根直徑 25 mm 的 A-36 鋼桿支撐。若樑支承一 $P = 230$ kN 的負載，
(1) 試求每一鋼桿所受的力。 (10%)
(2) 若負載 $P = 230$ kN 釋放時，試求每一鋼桿的殘留應力。 (10%)
(鋼桿視為完全彈−塑性材料) (A-36 鋼降伏應力 $\sigma_Y = 250$ MPa)



參考解答:

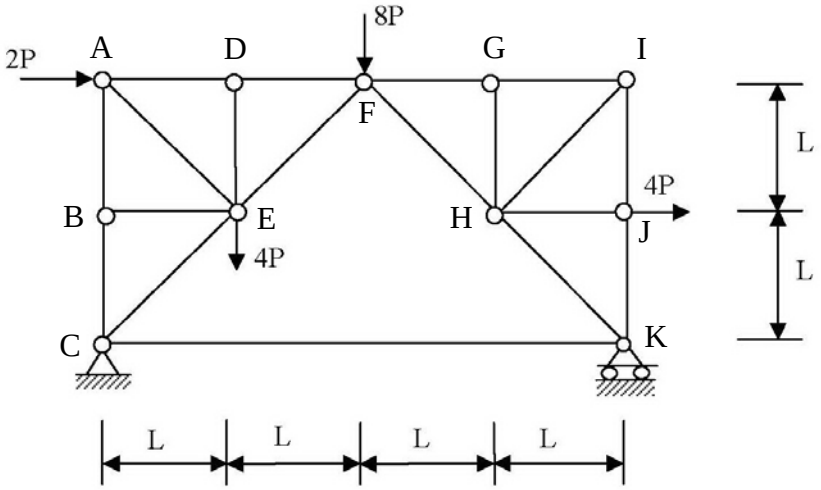
1. 如下圖所示之桁架，試問:

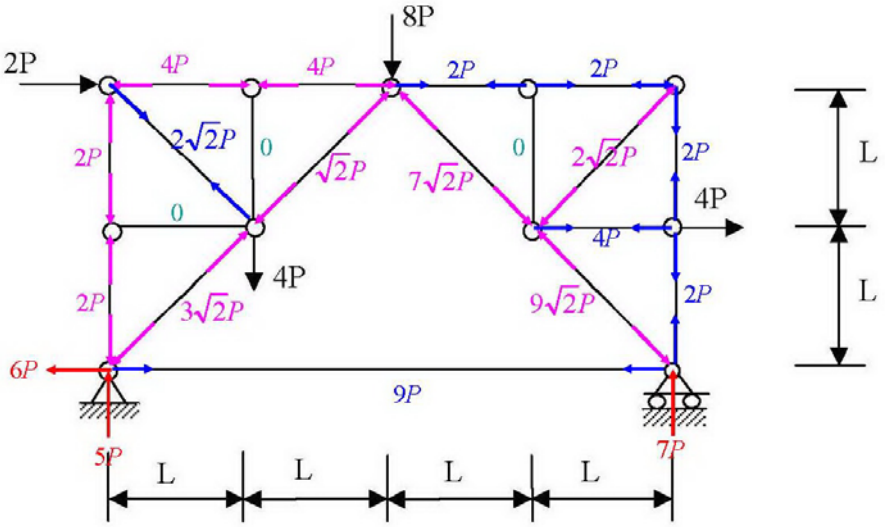
(1) 何者為零力桿件。 (6%)

(2) 何者為最大壓力桿件，其大小為何? (4%)

何者為最大拉力桿件，其大小為何? (4%)

(3) 若桿件截面積為 $\sqrt{2}\cdot 10^3$ mm^2 且桿件所能承受之最大拉或壓應力為 270 MPa ，則 P = ? (6%)





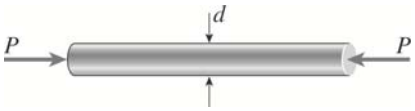
(1) 零力桿件為 BE、DE、GH

(2) 最大壓力桿件為 HK，其大小為 $9\sqrt{2}P$

最大拉力桿件為 HJ，其大小為 $4P$

(3) $\sigma = \dfrac{F}{A} \Rightarrow 270\cdot 10^6 = \dfrac{9\sqrt{2}P}{\sqrt{2}\cdot 10^3\cdot 10^{-6}} \Rightarrow P = 30\cdot 10^3 \text{ (N)} \Rightarrow P = 30 \text{ (kN)}$

2. 用在大型吊車的高強度鋼桿，直徑為 $d = 50$ mm（如下圖所示）。鋼的彈性模數 $E = 200$ GPa ，蒲松比 $\nu = 0.3$ 。因裕度所需，桿件的直徑在軸向壓力下限制為 50.025 mm ，求桿件的容許最大壓力 $P_{\max}$ 。 (20%)



$$\varepsilon_{lat} = \frac{50.025 - 50}{50} = 0.0005$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{lat}}{\varepsilon_{long}} \quad \Rightarrow \varepsilon_{long} = -\frac{\varepsilon_{lat}}{\nu} = -\frac{5}{3}\cdot 10^{-3}$$

$$\sigma = E\cdot\varepsilon_{long} = 200\cdot 10^{9}\cdot(-\frac{5}{3}\cdot 10^{-3}) = -\frac{1}{3}\cdot 10^{9}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow P = \sigma\cdot A = -\frac{1}{3}\cdot 10^{9}\cdot\pi\cdot(\frac{50}{2})^{2}\cdot 10^{-6} = -654.50\cdot 10^{3}\ (\text{N}) = -654.50\ (\text{kN})$$

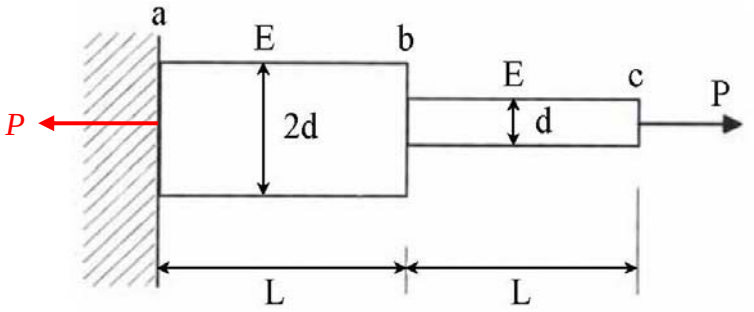
容許最大壓力 $P_{\max} = 654.50$ (kN)

3. 如下圖所示，軸向受力圓桿，試求 P 力作用下

(1) 桿件內力 (2) b、c 兩點之位移。 (3) 總應變能。 (4) 應變能密度。

(5) 全桿整體勁度。

已知: $E = 200$ GPa 、 $d = 0.1\,m$ 、 $L = 2\,m$ 、 $P = 30\,kN$ 。 (20%) (99 高考)



(1) $F_{ab} = P$ 、 $F_{bc} = P$

(2) $\delta_{b/a} = \dfrac{F_{ab}\cdot L_{ab}}{A_{ab}E} = \dfrac{30\cdot 10^{3}\cdot 2}{\pi\cdot(\frac{0.2}{2})^{2}\cdot 200\cdot 10^{9}} = 9.55\cdot 10^{-6}\ (\text{m}) = 9.55\cdot 10^{-3}\ (\text{mm})$

$$\delta_{c/b} = \frac{F_{bc}\cdot L_{bc}}{A_{bc}E} = \frac{30\cdot 10^{3}\cdot 2}{\pi\cdot(\frac{0.1}{2})^{2}\cdot 200\cdot 10^{9}} = 38.20\cdot 10^{-6}\ (\text{m}) = 38.20\cdot 10^{-3}\ (\text{mm})$$

$$\Delta_b = \delta_{b/a} = 9.55\cdot 10^{-3}\ (\text{mm})$$

$$\Delta_c = \delta_{b/a} + \delta_{c/b} = 4.775\cdot 10^{-2}\ (\text{mm})$$

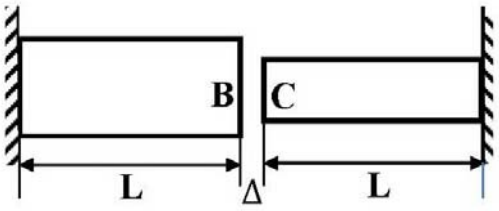
(3) $U=\frac{1}{2}F_{ab}\cdot\delta_{b/a}+\frac{1}{2}F_{bc}\cdot\delta_{c/b}=\frac{1}{2}(30\cdot10^{3}\cdot4.775\cdot10^{-5})=0.71625\,(\mathrm{J})$

(4) $u_{ab}=\frac{U_{ab}}{V_{ab}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot30\cdot10^{3}\cdot9.55\cdot10^{-6}}{\pi\cdot(\frac{0.2}{2})^{2}\cdot2}=2.28\,(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^{3}})$

$u_{bc}=\frac{U_{bc}}{V_{bc}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot30\cdot10^{3}\cdot38.20\cdot10^{-6}}{\pi\cdot(\frac{0.1}{2})^{2}\cdot2}=36.48\,(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^{3}})$

(5) $K=\frac{F}{\Delta}=\frac{P}{\Delta_{c}}=\frac{30\cdot10^{3}}{4.775\cdot10^{-5}}=628.27\cdot10^{6}\,(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}})$

4. 如下圖所示，兩桿的材料和長度相同，但截面積不相等(左桿為 nA (n > 1)，右桿為 A)，他們之間有一縫隙 Δ，當兩桿均勻升溫時，請分析他們剛好接觸和接觸以後，端面 B 和端面 C 的位移(彈性模數 E，熱膨脹係數 α，溫度為 T)。 (20%) (103 結技)



(1) 剛好接觸

$\delta=\varepsilon_{T}\cdot L=\alpha TL$

∴可看出因溫度上升 T 度，桿子的伸長量僅與桿子的長度、熱膨脹係數與溫度改變量有關

由於兩桿材料相同、長度相同與溫度改變量也相同

故兩桿均勻升溫且剛好接觸時，此時 $\delta_{B}=\delta_{C}=\frac{\Delta}{2}$

且兩端支承無支承反力

(2) 接觸以後

$F_{B}=F_{C}=-R$

$\delta_{B}=\frac{-RL}{E\cdot nA}+\alpha TL$

$\delta_{C}=\frac{-RL}{EA}+\alpha TL$

又 $\delta_{B}+\delta_{C}=\Delta \quad\Rightarrow-\frac{RL}{E\cdot nA}+\alpha TL-\frac{R\cdot L}{E\cdot A}+\alpha TL=\Delta$

$\Rightarrow R=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{EA}{L}(2\alpha TL-\Delta)$

$\therefore$ B 點位移 $\delta_B = \dfrac{-RL}{E\cdot nA} + \alpha TL = \dfrac{n-1}{n+1}\alpha TL + \dfrac{1}{n+1}\Delta \quad (\rightarrow)$

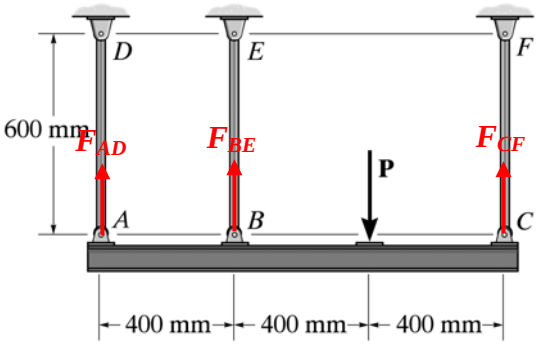
C 點位移 $\delta_C = \dfrac{-RL}{EA} + \alpha TL = -\dfrac{n-1}{n+1}\alpha TL + \dfrac{n}{n+1}\Delta \quad (\leftarrow)$

5. 剛性樑由三根直徑 25 mm 的 A-36 鋼桿支撐。若樑支承一 $P = 230$ kN 的負載，

(1) 試求每一鋼桿所受的力。 (10%)

(2) 若負載 $P = 230$ kN 釋放時，試求每一鋼桿的殘留應力。 (10%)

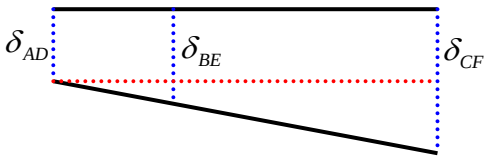
(鋼桿視為完全彈−塑性材料) (A-36 鋼降伏應力 $\sigma_Y = 250$ MPa) (106 結技)



(1)

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow F_{AD} + F_{BE} + F_{CF} = P \quad \ldots\ldots$ (a)

$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow F_{BE}\cdot 400 + F_{CF}\cdot 1200 - P\cdot 800 = 0 \quad \Rightarrow F_{BE} + 3F_{CF} = 2P \ldots\ldots$ (b)



由幾何位移可看出相容方程為 $\dfrac{\delta_{BE} - \delta_{AD}}{400} = \dfrac{\delta_{CF} - \delta_{AD}}{1200}$

$\Rightarrow 3\delta_{BE} - 2\delta_{AD} - \delta_{CF} = 0$

$\Rightarrow 3\dfrac{F_{BE}\cdot L}{AE} - 2\dfrac{F_{AD}\cdot L}{AE} - \dfrac{F_{CF}\cdot L}{AE} = 0$

$\Rightarrow 3F_{BE} - 2F_{AD} - F_{CF} = 0 \ldots\ldots$ (c)

由解(a)、(b)、(c)聯立方程可得 $F_{BE} = \dfrac{2}{7}P$，$F_{CF} = \dfrac{4}{7}P$，$F_{AD} = \dfrac{1}{7}P$

$\therefore \quad F_{BE} = \dfrac{2}{7}\cdot 230 = 65.71$ (kN)

$F_{CF} = \dfrac{4}{7}\cdot 230 = 131.43$ (kN)

$$F_{AD} = \frac{1}{7} \cdot 230 = 32.86 \text{ (kN)}$$

$$\sigma_{BE} = \frac{F_{BE}}{A} = \frac{65.71 \cdot 10^3}{\pi \cdot 12.5^2 \cdot 10^{-6}} = 133.87 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 133.87 \text{ (MPa)} \ < \ \sigma_Y$$

$$\sigma_{CF} = \frac{F_{CF}}{A} = \frac{131.43 \cdot 10^3}{\pi \cdot 12.5^2 \cdot 10^{-6}} = 267.74 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 267.74 \text{ (MPa)} \ > \ \sigma_Y$$

$$\sigma_{AD} = \frac{F_{AD}}{A} = \frac{32.86 \cdot 10^3}{\pi \cdot 12.5^2 \cdot 10^{-6}} = 66.94 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 66.94 \text{ (MPa)} \ < \ \sigma_Y$$

$\because$ $\sigma_{CF} > \sigma_Y$ 表示 CF 桿已降服，故須力量重分配

$$\therefore \quad F'_{CF} = \sigma_Y \cdot A = 250 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 12.5^2 \cdot 10^{-6} = 122718.46 \text{ (N)} = 122.72 \text{ (kN)}$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow F'_{BE} + 3F'_{CF} = 2P \quad \Rightarrow F'_{BE} = 2P - 3F'_{CF} = 91.84 \text{ (kN)}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow F'_{AD} + F'_{BE} + F'_{CF} = P \quad \Rightarrow F'_{AD} = P - F'_{CF} - F'_{BE} = 15.44 \text{ (kN)}$$

$$\sigma'_{BE} = \frac{F'_{BE}}{A} = \frac{91.84 \cdot 10^3}{\pi \cdot 12.5^2 \cdot 10^{-6}} = 187.10 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 187.10 \text{ (MPa)} \ < \ \sigma_Y$$

$$\sigma'_{AD} = \frac{F'_{AD}}{A} = \frac{15.44 \cdot 10^3}{\pi \cdot 12.5^2 \cdot 10^{-6}} = 31.45 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 31.45 \text{ (MPa)} \ < \ \sigma_Y$$

(2) $(\sigma_{CF})_r = \sigma'_{CF} - \sigma_{BE} = 250 - 267.74 = -17.74$ (MPa)

$(\sigma_{BE})_r = \sigma'_{BE} - \sigma_{BE} = 187.10 - 133.87 = 53.23$ (MPa)

$(\sigma_{AD})_r = \sigma'_{AD} - \sigma_{AD} = 31.45 - 66.94 = -35.49$ (MPa)