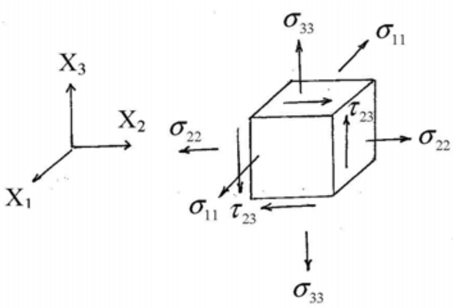
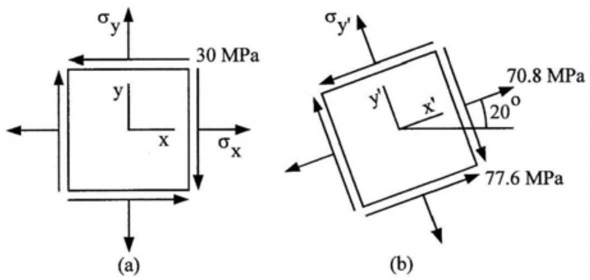
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2023 材料力學 2AB 班第三次大考參考解答

日期：2023 年 06 月 07 日　　姓名：______________　　學號：______________

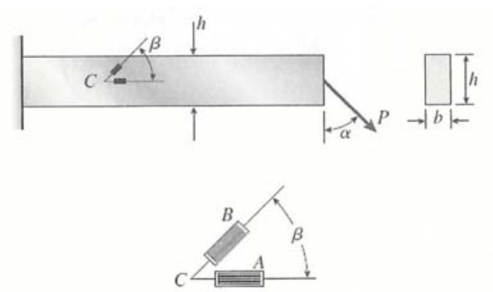
1. 一固體材料承受多軸應力作用，如圖二所示，其中 $\tau_{23}=5\ \text{MPa}$，$\sigma_{11}=11\ \text{MPa}$，$\sigma_{22}=\sigma_{33}=4\ \text{MPa}$，於此多軸應力作用下，求此固體材料所承受之最大剪應力。(20%)

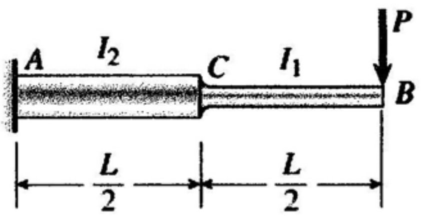


2. 有一平面應力元素受應力如下圖(a)所示，當此圓速逆時鐘方向旋轉 20° 後，此應力狀況如下圖(b)所示。假設此應力元素之彈性模數 $E=25\ \text{GPa}$，蒲松比 $\nu=0.2$，請計算應力 σ_x、σ_y 及此元素在 x 及 y 座標系統下之應變 ε_x、ε_y、γ_{xy}。(20%)



3. 矩形截面（$b=20\ \text{mm}$、$h=175\ \text{mm}$）之懸臂梁如下左圖所示。梁之楊氏模數 $E=200\ \text{GPa}$ 與蒲松比 $\nu=1/3$，荷載 P 作用在自由端截面中心處並與垂直線夾 α 角，C 點位於 $h/2$ 梁高處，其上貼有兩應變規，應變規(A)貼於水平方向，應變規(B)貼於夾角 $\beta=60^\circ$ 之方向，兩應變規所量測之讀數為 $\varepsilon_A=145\times10^{-6}$ 與 $\varepsilon_B=-165\times10^{-6}$，試計算荷載 P 與所夾之角度 α 分別為何？(20%)





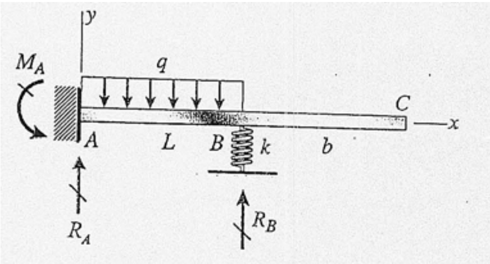
4. 給一懸臂樑 ACB 如上右圖所示，其中在 AC 段之慣性矩為 I_2，在 CB 段之慣性矩為 I_1，試計算在 B 點之位移 δ_B。(20%)

5. 如下圖所示的均質樑 ABC，其材料常數為 EI，長為 $L+b$，受到均布載重作用。設彈簧之彈力常數 $k=\dfrac{EI}{L^3}$

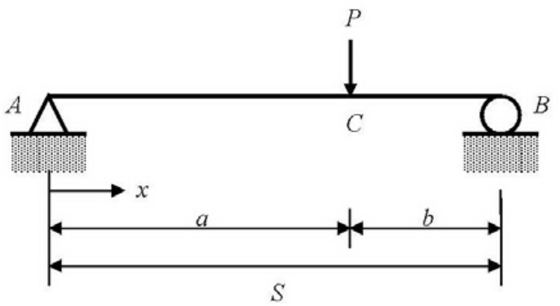
(1) 求 A 點及 B 點的反力 M_B ，R_A ，R_B; (12%)

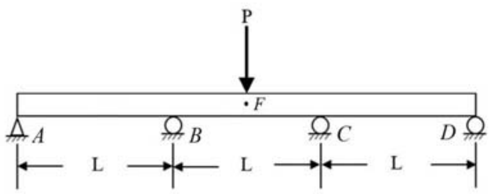
(2) 求 B 點的撓度 Δ_B; (4%)

(3) 求撓度曲線上之反曲點的位置。(4%)



6. 試以面積力矩法求下圖懸臂樑之 θ_A 、θ_B 、$v(\dfrac{a}{2})$ 、$v(\dfrac{2a}{3})$ 、$v(\dfrac{3a}{4})$ 與 v_C 。(20%)





7. 一根樑的材料彈性係數為 E，慣性矩為 I，長 $3L$，由左至右等分為 3 段，用 1 個鉸接及 3 個滾輪等間距支撐，中間點承受一集中載重 P，如上右圖所示，試求支承 A 與 B 的反力，並計算第二段最大點 F 的上下位移量。(答案以 E、I、L、P 及數字表示)(20%)

8. 對於這學期上課方式的改變與如何學好材力，同學們有何感想與建議? (10%)

(參考公式)

平面應力轉換方程式

$$\sigma_{x'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'}=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$

平面應變轉換方程式

$$\varepsilon_{x'}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\theta+\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2}=-\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\sin 2\theta+\frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

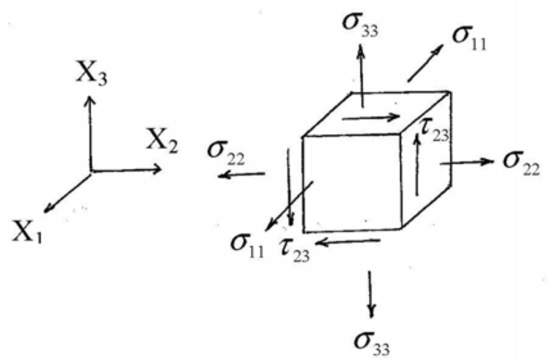
扭轉公式： $\tau=\dfrac{T\rho}{J}$，**彎曲公式：** $\sigma=-\dfrac{My}{I}$，**剪力公式：** $\tau=\dfrac{VQ}{It}$

應變–應力關係式： $\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)]$，$\varepsilon_y=\dfrac{1}{E}[\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)]$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)]$$

參考解答:

1. 一固體材料承受多軸應力作用，如圖二所示，其中$\tau_{23} = 5\ \text{MPa}$，$\sigma_{11} = 11\ \text{MPa}$，$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 4\ \text{MPa}$，於此多軸應力作用下，求此固體材料所承受之最大剪應力。(20%) (107 地特)



固定X_1軸，由平面應力轉換公式可知

$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 4\ \text{MPa}$，$\tau_{23} = 5\ \text{MPa}$ 此為最大平面剪應力狀態

故主應力為

$$\sigma_{22',33'} = \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2})^2 + (\tau_{23})^2}$$

$\Rightarrow \sigma_{22'} = 4 + 5 = 9\ (\text{MPa})$，$\sigma_{33'} = 4 - 5 = -1\ (\text{MPa})$

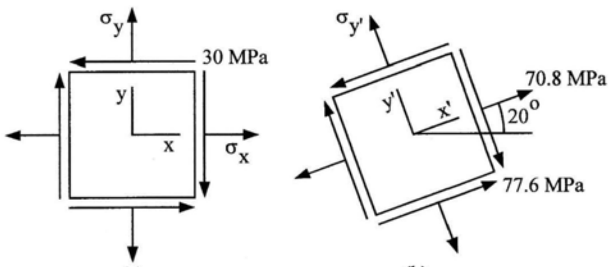
由$\sigma_{11'} = \sigma_{11} = 11\ \text{MPa}$，$\sigma_{22'} = 9\ \text{MPa}$，$\sigma_{33'} = -1\ \text{MPa}$ 可知

此為三軸應力狀態

故絕對最大剪應力為 $\tau_{\max} = \dfrac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \dfrac{11 - (-1)}{2} = 6\ (\text{MPa})$

2. 有一平面應力元素受應力如下圖(a)所示，當此圖逆時鐘方向旋轉20°後，此應力狀況如下圖(b)所示。假設此應力元素之彈性模數$E = 25\,\text{GPa}$，蒲松比$\nu = 0.2$，請計算應力σ_x、σ_y及此元素在 x 及 y 座標系統下之應變ε_x、ε_y、γ_{xy}。

(20%)(111 土技)



(a) (b)

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow 70.8 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 40^\circ - 30 \cdot \sin 40^\circ$$

$$\Rightarrow 0.883\sigma_x + 0.117\sigma_y = 90.08 \quad \ldots (1)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow -77.6 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 40^\circ - 30 \cdot \cos 40^\circ$$

$$\Rightarrow -0.321\sigma_x + 0.321\sigma_y = -54.62 \quad \ldots (2)$$

由(1)、(2)可得 $\sigma_x = 109.99\ (\text{MPa})$ 、 $\sigma_y = -60.17\ (\text{MPa})$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} = \frac{109.99 \cdot 10^6}{25 \cdot 10^9} + 0.2 \cdot \frac{60.17 \cdot 10^6}{25 \cdot 10^9} = 4.88 \cdot 10^{-3}$$

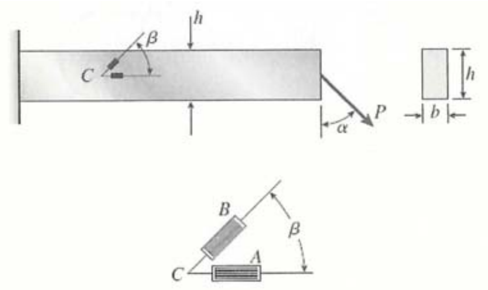
$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} = -0.2 \cdot \frac{109.99 \cdot 10^6}{25 \cdot 10^9} - \frac{60.17 \cdot 10^6}{25 \cdot 10^9} = -3.29 \cdot 10^{-3}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{25}{2(1+0.2)} = \frac{125}{12}\ (\text{GPa})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{-30 \cdot 10^6}{\frac{125}{12} \cdot 10^9} = -2.88 \cdot 10^{-3}$$

3. 矩形截面（$b = 20\ \text{mm}$ 、 $h = 175\ \text{mm}$）之懸臂梁如下圖所示。梁之楊氏模數 $E = 200\ \text{GPa}$ 與蒲松比 $\nu = 1/3$，荷載 P 作用在自由端截面中心處並與垂直線夾 α 角，C 點位於 $h/2$ 梁高處，其上貼有兩應變規，應變規(A)貼於水平方向，應變規(B)貼於夾角 $\beta = 60^\circ$ 之方向，兩應變規所量測之讀數為 $\varepsilon_A = 145\times10^{-6}$ 與 $\varepsilon_B = -165\times10^{-6}$，試計算荷載 P 與所夾之角度 α 分別為何? (20%)

(106 台大大地)



$$\varepsilon_x = \varepsilon_A = 145\times10^{-6},\ \ \varepsilon_B = -165\times10^{-6},\ \ \beta = 60^\circ$$

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = -48.33\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\beta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\beta$$

$$\Rightarrow -165\times10^{-6} = \frac{145 + 48.33}{2}\cdot10^{-6} + \frac{145 - 48.33}{2}\cdot10^{-6}\cdot\cos120^\circ + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin120^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = -381\times10^{-6}$$

$$\sigma_x = E\cdot\varepsilon_x = 200\cdot10^{9}\cdot(145\cdot10^{-6}) = 29\cdot10^{6}\ (\text{N})$$

$$\tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\gamma_{xy} = \frac{200\cdot10^{9}}{2(1+\frac{1}{3})}\cdot381\times10^{-6} = 28.575\cdot10^{6}\ (\text{N})$$

又 $\sigma_x = \dfrac{N}{A} = \dfrac{P\cdot\sin\alpha}{A}$, $\quad \tau_{xy} = \dfrac{3}{2}\dfrac{V}{A} = \dfrac{3}{2}\dfrac{P\cdot\cos\alpha}{A}$

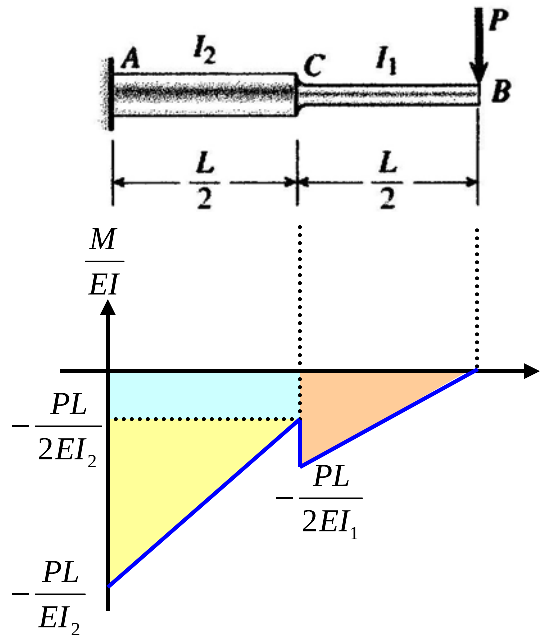
$\therefore\ \ 29\cdot10^{6} = \dfrac{P\cdot\sin\alpha}{20\cdot175\cdot10^{-6}} \quad \Rightarrow P\cdot\sin\alpha = 101500 \quad .....(1)$

$28.575\cdot10^{6} = \dfrac{P\cdot\cos\alpha}{20\cdot175\cdot10^{-6}} \quad \Rightarrow P\cdot\cos\alpha = 66675\ .....(2)$

由 $\dfrac{(1)}{(2)}$ 可得 $\tan\alpha = 1.5223 \quad \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(1.5223) = 0.9896\ (\text{rad}) = 56.70^\circ$

代回(1)可得 $P = 121439\ (\text{N})$

4. 給一懸臂樑 ACB 如下圖所示，其中在 AC 段之慣性矩為 I_2，在 CB 段之慣性矩為 I_1，試計算在 B 點之位移 δ_B。（20%） （108 台大大地）



$$\delta_B = t_{B/A}$$

$$= -\frac{PL}{2EI_2}\cdot\frac{L}{2}\cdot(\frac{L}{4}+\frac{L}{2}) + \frac{1}{2}\cdot(-\frac{PL}{2EI_2})\cdot\frac{L}{2}\cdot(\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2}+\frac{L}{2}) + \frac{1}{2}\cdot(-\frac{PL}{2EI_1})\cdot\frac{L}{2}\cdot(\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{2})$$

$$= -\frac{3PL^3}{16EI_2} - \frac{5PL^3}{48EI_2} - \frac{PL^3}{24EI_1}$$

$$= -(\frac{7PL^3}{24EI_2} + \frac{PL^3}{24EI_1})$$ （負表示位移向下）

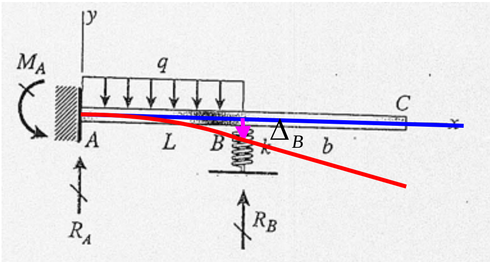
5. 如下圖所示的均質樑 ABC，其材料常數為 EI，長為 $L+b$，受到均布載重作用。

設彈簧之彈力常數 $k=\dfrac{EI}{L^3}$

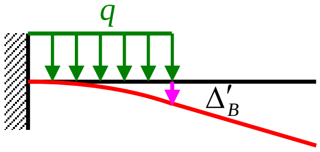
(1) 求 A 點及 B 點的反力 M_B ， R_A ， R_B ; (12%)

(2) 求 B 點的撓度 Δ_B ; (4%)

(3) 求撓度曲線上之反曲點的位置。(4%)　　　　(100 台科營建)

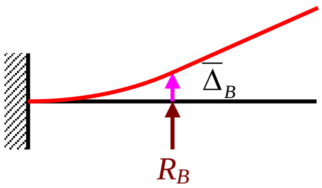


(1)



由積分法可得 $v=-\dfrac{qx^2}{24EI}(x^2-4Lx+6L^2)$

$\therefore\ \Delta'_B=-\dfrac{qL^4}{8EI}$



由積分法可得 $v=\dfrac{Px^2}{6EI}(3L-x)$

$\therefore\ \overline{\Delta}_B=\dfrac{R_BL^3}{3EI}$

$$\Delta_B=\Delta'_B+\overline{\Delta}_B$$

$$\Rightarrow -\frac{R_B}{k}=-\frac{qL^4}{8EI}+\frac{R_BL^3}{3EI}\qquad\Rightarrow R_B=\frac{3qL}{32}$$

$$\sum F_y=0\qquad\Rightarrow R_A+R_B-qL=0\qquad\Rightarrow R_A=\frac{29qL}{32}$$

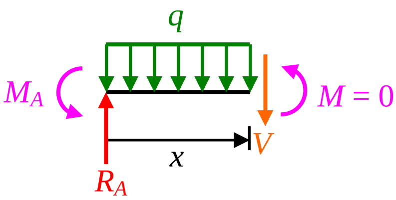
$$\sum M=0\qquad\Rightarrow M_A+R_BL-qL\cdot\frac{L}{2}=0\qquad\Rightarrow M_A=\frac{13qL^2}{32}$$

(2) $\Delta_B=-\dfrac{R_B}{k}=-\dfrac{3qL^4}{32}$

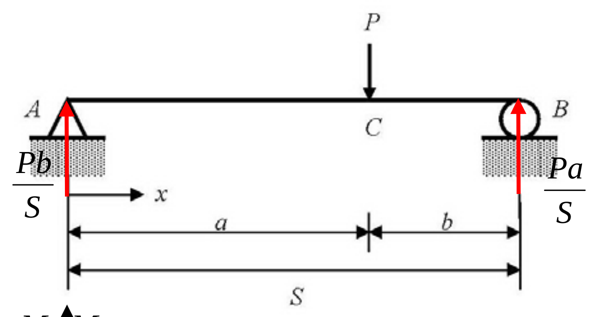
(3) 反曲點在彎矩 M 為零處

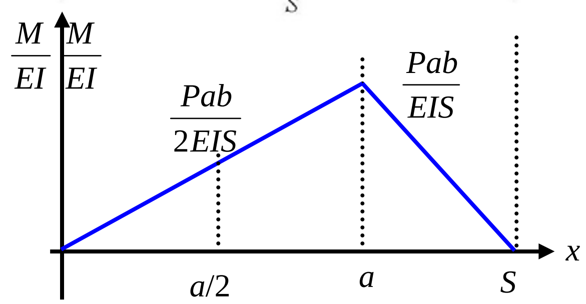
$$\sum M_o=0\qquad\Rightarrow M_A+qx\cdot\frac{x}{2}-R_A\cdot x=0$$

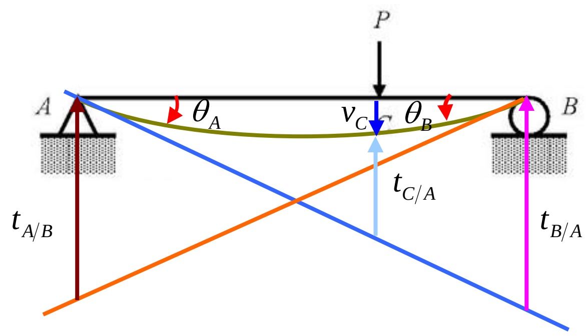
$$\Rightarrow\frac{13qL^2}{32}+\frac{qx^2}{2}-\frac{29qL}{32}x=0\qquad\Rightarrow x=0.8125L$$



6. 試以面積力矩法求下圖懸臂樑之θ_A、θ_B、$v(\frac{a}{2})$、$v(\frac{2a}{3})$、$v(\frac{3a}{4})$與v_C。(20%)







- $t_{B/A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{Pab}{EIS} \cdot (\frac{a}{3} + b) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{Pab}{EIS} \cdot (\frac{2b}{3})$

  $= \frac{1}{6} \frac{Pab}{EIS}(a^2 + 3ab + 2b^2) = \frac{1}{6} \frac{Pab}{EI}(a + 2b)$

  $|\theta_A| = \frac{t_{B/A}}{S} = \frac{1}{6} \frac{Pab}{EIS}(a + 2b)$

  $\because$ θ_A 為順時鐘方向旋轉

  $\therefore$ $\theta_A = -\frac{1}{6} \frac{Pab}{EIS}(a + 2b)$

- $t_{A/B} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{Pab}{EIS} \cdot (\frac{2a}{3}) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{Pab}{EIS} \cdot (a + \frac{b}{3})$

  $= \frac{1}{6} \frac{Pab}{EIS}(2a^2 + 3ab + b^2) = \frac{1}{6} \frac{Pab}{EI}(2a + b)$

  $|\theta_B| = \frac{t_{A/B}}{S} = \frac{1}{6} \frac{Pab}{EIS}(2a + b)$

  $\because$ θ_B 為逆時鐘方向旋轉

  $\therefore$ $\theta_B = \frac{1}{6} \frac{Pab}{EIS}(2a + b)$

- $t_{C/A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{Pab}{EIS} \cdot (\frac{a}{3}) = \frac{1}{6} \frac{Pa^3 b}{EIS}$

$$|v_C| = |\theta_A| \cdot a - |t_{C/A}| = \frac{1}{6} \frac{Pab}{EIS}(a+2b) \cdot a - \frac{1}{6} \frac{Pa^3 b}{EIS} = \frac{1}{3} \frac{Pa^2 b^2}{EIS}$$

$\because v_C$ 為向下移動

$$\therefore v_C = -\frac{1}{3} \frac{Pa^2 b^2}{EIS}$$

同理： $v_D = v(\frac{a}{2})$

$$t_{D/A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{Pab}{2EIS} \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}) = \frac{1}{48} \frac{Pa^3 b}{EIS}$$

$$|v_D| = |\theta_A| \cdot \frac{a}{2} - |t_{D/A}| = \frac{1}{6} \frac{Pab}{EIS}(a+2b) \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{48} \frac{Pa^3 b}{EIS}$$

$$= \frac{1}{16} \frac{Pa^3 b}{EIS} + \frac{1}{6} \frac{Pa^2 b^2}{EIS} = \frac{1}{48} \frac{Pa^2 b}{EIS}(3a+8b)$$

$\because v_D$ 為向下移動

$$\therefore v_D = -\frac{1}{48} \frac{Pa^2 b}{EIS}(3a+8b)$$

$$v_F = v(\frac{2a}{3})$$

$$t_{F/A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{2Pab}{3EIS} \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{3}) = \frac{4}{81} \frac{Pa^3 b}{EIS}$$

$$|v_F| = |\theta_A| \cdot \frac{2a}{3} - |t_{F/A}| = \frac{1}{6} \frac{Pab}{EIS}(a+2b) \cdot \frac{2a}{3} - \frac{4}{81} \frac{Pa^3 b}{EIS}$$

$$= \frac{5}{81} \frac{Pa^3 b}{EIS} + \frac{2}{9} \frac{Pa^2 b^2}{EIS} = \frac{1}{81} \frac{Pa^2 b}{EIS}(5a+18b)$$

$\because v_F$ 為向下移動

$$\therefore v_F = -\frac{1}{81} \frac{Pa^2 b}{EIS}(5a+18b)$$

$$v_G = v(\frac{3a}{4})$$

$$t_{G/A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{3Pab}{4EIS} \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4}) = \frac{9}{128} \frac{Pa^3 b}{EIS}$$

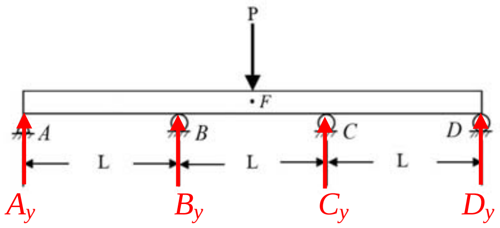
$$|v_G| = |\theta_A| \cdot \frac{3a}{4} - |t_{G/A}| = \frac{1}{6} \frac{Pab}{EIS}(a+2b) \cdot \frac{3a}{4} - \frac{9}{128} \frac{Pa^3 b}{EIS}$$

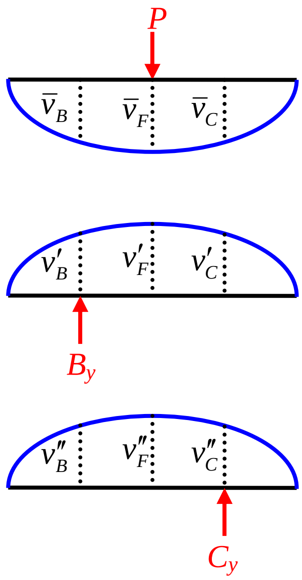
$$= \frac{7}{128} \frac{Pa^3 b}{EIS} + \frac{1}{4} \frac{Pa^2 b^2}{EIS} = \frac{1}{128} \frac{Pa^2 b}{EIS}(7a+32b)$$

$\because v_G$ 為向下移動

$$\therefore v_G = -\frac{1}{128} \frac{Pa^2 b}{EIS}(7a+32b)$$

7. 一根樑的材料彈性係數為 E，慣性矩為 I，長 $3L$，由左至右等分為 3 段，用 1 個鉸接及 3 個滾輪等間距支撐，中間點承受一集中載重 P，如下圖所示，試求支承 A 與 B 的反力，並計算第二段最大點 F 的上下位移量。(答案以 E、I、L、P 及數字表示)(20%)





$\because$ 對稱

$\therefore \quad A_y = D_y, \quad B_y = C_y$

由上題結果將 $a = \dfrac{3}{2}L$ 、 $b = \dfrac{3}{2}L$ 、 $S = 3L$ 代入可得

$$\bar{v}_F = -\frac{1}{3}\frac{Pa^2b^2}{EIS} = -\frac{9}{16}\frac{PL^3}{EI}$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_C = -\frac{1}{81}\frac{Pa^2b}{EIS}(5a+18b) = -\frac{23}{48}\frac{PL^3}{EI}$$

由上題結果將 $a = 2L$ 、 $b = L$ 、 $S = 3L$ 代入可得

$$v''_B = \frac{1}{48}\frac{Pa^2b}{EIS}(3a+8b) = \frac{7}{18}\frac{C_yL^3}{EI}$$

$$v''_F = \frac{1}{128}\frac{Pa^2b}{EIS}(7a+32b) = \frac{23}{48}\frac{C_yL^3}{EI}$$

$$v''_C = \frac{1}{3}\frac{Pa^2b^2}{EIS} = \frac{4}{9}\frac{C_yL^3}{EI}$$

由對稱性可得

$$v'_B = \frac{1}{3}\frac{Pa^2b^2}{EIS} = \frac{4}{9}\frac{B_yL^3}{EI}$$

$$v'_F = \frac{1}{128}\frac{Pa^2b}{EIS}(7a+32b) = \frac{23}{48}\frac{B_yL^3}{EI}$$

$$v'_C = \frac{1}{48}\frac{Pa^2b}{EIS}(3a+8b) = \frac{7}{18}\frac{B_yL^3}{EI}$$

$\because$ B 點與 C 點皆為滾支承，又 $B_y = C_y$

$$\therefore \quad v_B = \bar{v}_B + v'_B + v''_B \quad \Rightarrow 0 = -\frac{23}{48}\frac{PL^3}{EI} + \frac{4}{9}\frac{B_yL^3}{EI} + \frac{7}{18}\frac{C_yL^3}{EI} \quad \Rightarrow B_y = C_y = \frac{23}{40}P$$

由 $\sum F_y = 0$ 且 $A_y = D_y$ 可得 $A_y + B_y + C_y + D_y = P \Rightarrow A_y = D_y = -\dfrac{3}{40}P$

$$v_F = \bar{v}_F + v'_F + v''_F = -\frac{9}{16}\frac{PL^3}{EI} + \frac{23}{48}\frac{B_yL^3}{EI} + \frac{23}{48}\frac{C_yL^3}{EI} = -\frac{11}{960}\frac{PL^3}{EI}$$ (負表示向下)