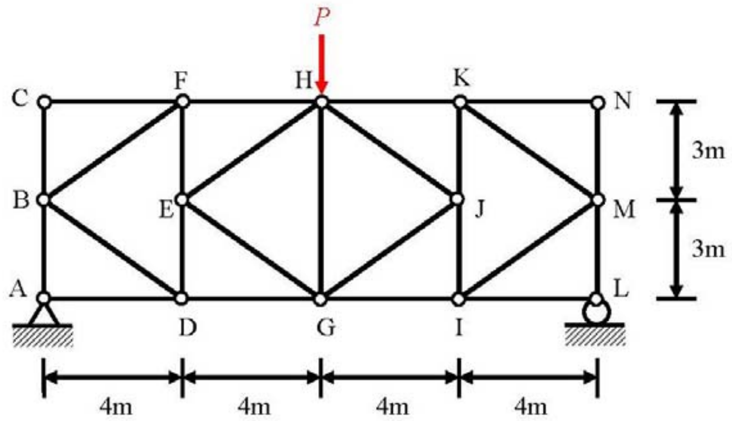
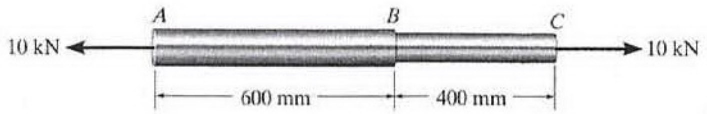
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2023 材料力學 2AB 班第一次大考參考解答

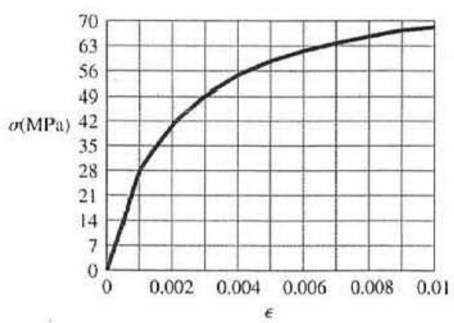
日期：2023 年 04 月 13 日　　姓名：______________　　學號：______________

1. 下圖之桁架由 A-36 合金鋼材組成，其彈性係數（modulus of elasticity）與降伏應力（yielding stress）分別為 $E = 200\ \text{GPa}$，$\sigma_Y = 250\ \text{MPa}$。所有桿件之截面積 A 均為 $2.5\times10^2\ \text{mm}^2$。若受外力 P 作用（如下圖示），在所有桿件均無永久變形（permanent deformation）條件下，試問:
   (1) 有多少根零力構件? (4%)
   (2) 試求出構件 EG、EH 之受力情況（請註明受拉力或壓力）。 (8%)
   (3) 試求最大作用力 P 之值。 (8%)



2. 實心圓桿 ABC 受到拉力 $P = 10\ \text{kN}$ 作用，如下圖所示，使得 AB 部分之拉應力 $\sigma_{AB} = 35\ \text{MPa}$；$BC$ 部分之拉應力 $\sigma_{BC} = 62.5\ \text{MPa}$。實心圓桿 ABC 之 $\sigma-\varepsilon$ 之關係如下圖所示，求:
   (1) 圓桿 ABC 之楊氏模數 E，及降伏應力(yield stress) σ_Y。 (6%)
   (2) 拉力 $P = 10\ \text{kN}$ 作用時，圓桿 ABC 之伸長量 δ。 (7%)
   (3) 外力卸載後，，圓桿 ABC 之永久伸長量 δ_P。 (7%)



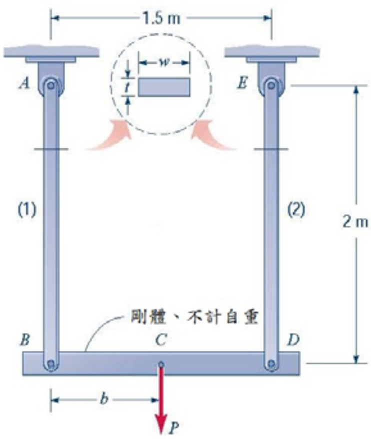


3. 如下圖所示，一剛性、重量不計之樑 BD 承受一負載 P。兩端則由懸吊桿(1)與(2)所支撐，此兩桿原長均為 2 m，且由相同材料所構成，而 $L_{BD} = 1.5$ m。此兩桿原始截面分別為 $w_1 = 40$ mm 、$t_1 = 20$ mm 與 $w_2 = 50$ mm 、$t_2 = 25$ mm 。

   (a) 當施加負載時，若要保持 BD 樑仍維持水平，則 b 為何? (7%)

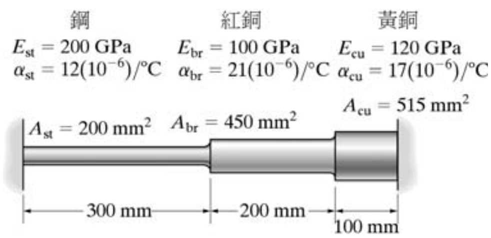
   (b) 當負載 $P = 205$ kN 時，若懸吊桿的縱向應變 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 500\times10^{-6}$，則彈性模數 E 為何? (7%)

   (c) 如上(a)、(b)所示負載 P 之作用，將使懸吊桿(2)之 w_2 從 50 mm 縮小至 49.9918 mm 時，此材料之浦松比 ν 為何? (6%)



4. 三根不同材料棒連接在一起並在 $T_1 = 12°C$ 時置放於兩面牆之間。當溫度 $T_2 = 18°C$ 時，施加在剛性支承點上的力。材料之截面積和物理性質如圖所示。

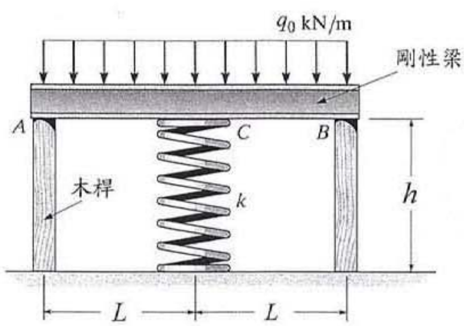
(20%)



5. 如下圖所示，剛性樑由兩根木桿及彈簧所支撐，未加載重之前，每根木桿的長度為 h，截面積為 A，楊氏模數為 E;彈簧的長度為 $h+\Delta$，彈力常數為 k。求施加 q_0 kN/m 之均佈載重後，

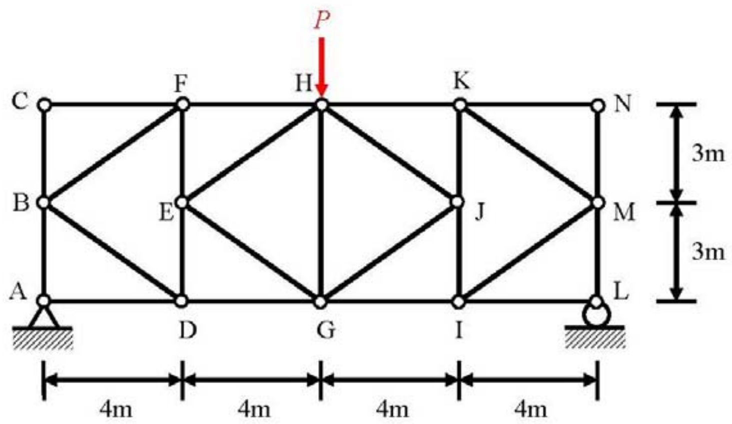
   (1) 木桿的內力 F_A 及彈簧的內力 F_S 。(14%)

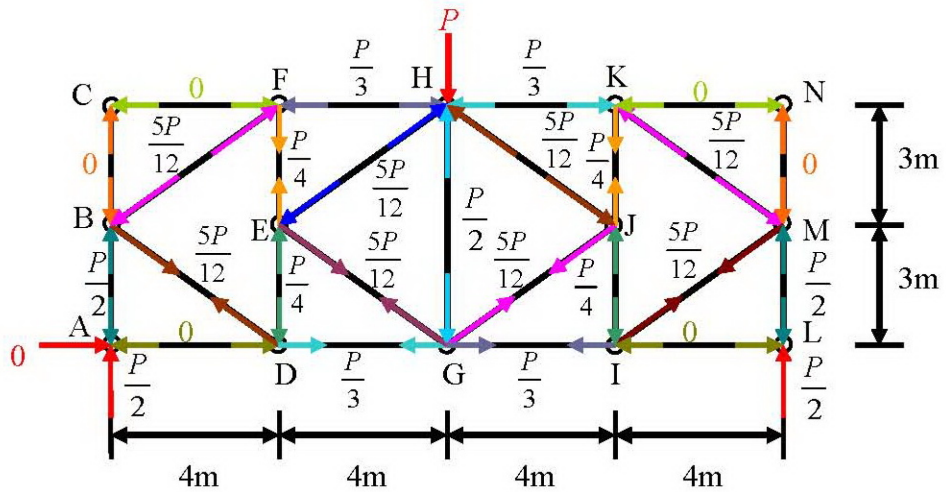
   (2) A 點之垂直位移 δ_A 及彈簧的縮短量 δ_S 。(6%)



參考解答:

1. 下圖之桁架由 A-36 合金鋼材組成，其彈性係數（modulus of elasticity）與降伏應力（yielding stress）分別為 $E = 200$ GPa ，$\sigma_Y = 250$ MPa 。所有桿件之截面積 A 均為 2.5×10^2 mm^2 。若受外力 P 作用（如下圖示），在所有桿件均無永久變形（permanent deformation）條件下，試問:
   (1) 有多少根零力構件? (4%)
   (2) 試求出構件 EG、EH 之受力情況（請註明受拉力或壓力）。 (8%)
   (3) 試求最大作用力 P 之值。 (8%)





(1) 零力桿件一共有 6 根

(2) $F_{EG} = \dfrac{5}{12}P$ (拉力) $\qquad F_{EH} = \dfrac{5}{12}P$ (壓力)

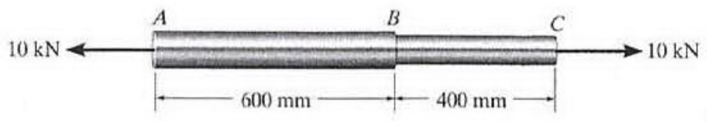
(3) $\sigma_Y = \dfrac{F}{A} \quad \Rightarrow 250\cdot10^6 = \dfrac{\frac{P}{2}}{2.5\cdot10^2\cdot10^{-6}} \quad \Rightarrow P = 125\cdot10^3\ (\text{N}) = 125\ (\text{kN})$

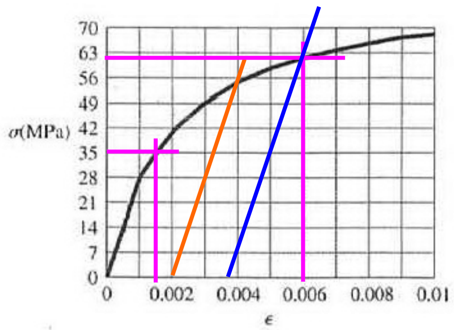
2. 實心圓桿 ABC 受到拉力 $P = 10$ kN 作用，如下圖所示，使得 AB 部分之拉應力 $\sigma_{AB} = 35$ MPa；BC 部分之拉應力 $\sigma_{BC} = 62.5$ MPa。實心圓桿 ABC 之 $\sigma - \varepsilon$ 之關係如下圖所示，求:

(1) 圓桿 ABC 之楊氏模數 E，及降伏應力(yield stress) σ_Y 。 (6%)

(2) 拉力 $P = 10$ kN 作用時，圓桿 ABC 之伸長量 δ 。 (7%)

(3) 外力卸載後，，圓桿 ABC 之永久伸長量 δ_P 。 (7%) (102 臺科營建丁組)





(1) $E = \dfrac{28}{0.001} = 28 \cdot 10^3 \text{ (MPa)} = 28 \text{ (GPa)}$

由偏距法 $\varepsilon = 0.2\% = 0.002$ 可得 $\sigma_Y = 56 \text{ (MPa)}$

(2) 拉力 $P = 10$ kN 作用時，$\sigma_{AB} = 35 \text{ MPa} \Rightarrow \varepsilon_{AB} = 0.0015$

$\sigma_{BC} = 62.5 \text{ MPa} \Rightarrow \varepsilon_{BC} = 0.006$

$\delta = 0.0015 \cdot 600 + 0.006 \cdot 400 = 3.3 \text{ (mm)}$

(3) ∵AB 桿未降伏

∴外力移除後，恢復原狀，不會有變形

永久應變 $\varepsilon_P = 0.006 - \dfrac{62.5}{28000} = 0.003768$

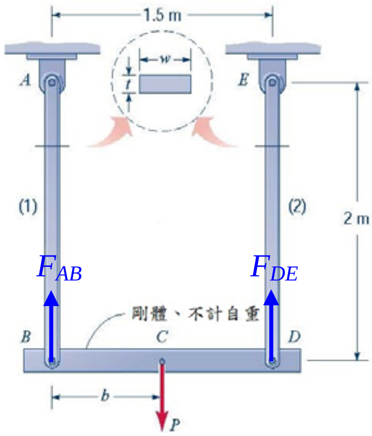
$\delta_P = 0.003768 \cdot 400 = 1.5072 \text{ (mm)}$

3. 如下圖所示，一剛性、重量不計之樑 BD 承受一負載 P。兩端則由懸吊桿(1)與(2)所支撐，此兩桿原長均為 2 m，且由相同材料所構成，而 $L_{BD} = 1.5$ m。此兩桿原始截面分別為 $w_1 = 40$ mm、$t_1 = 20$ mm 與 $w_2 = 50$ mm、$t_2 = 25$ mm。

(a) 當施加負載時，若要保持 BD 樑仍維持水平，則 b 為何? (7%)

(b) 當負載 $P = 205$ kN 時，若懸吊桿的縱向應變 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 500\times10^{-6}$，則彈性模數 E 為何? (7%)

(c) 如上(a)、(b)所示負載 P 之作用，將使懸吊桿(2)之 w_2 從 50 mm 縮小至 49.9918 mm 時，此材料之浦松比 ν 為何? (6%)



(a) $\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow F_{DE}\cdot 1.5 - P\cdot b = 0 \quad \Rightarrow F_{DE} = \dfrac{2b}{3}P$

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow F_{AB} = P - \dfrac{2b}{3}P$

$\because$ 桿(1)與桿(2)由相同材料構成且 BD 樑維持水平

$$\therefore \quad \sigma_{AB} = \sigma_{DE} \quad \Rightarrow \frac{P - \frac{2b}{3}P}{40\cdot 20\cdot 10^{-6}} = \frac{\frac{2b}{3}P}{50\cdot 25\cdot 10^{-6}}$$

$$\Rightarrow b = \frac{25}{41}\cdot\frac{3}{2} = \frac{75}{82} = 0.9146\ (\text{m})$$

(b) $P = 205$ kN $\quad \Rightarrow F_{DE} = 125\ (\text{kN})$

$\Rightarrow F_{AB} = 80\ (\text{kN})$

又 $\sigma = E\cdot\varepsilon \quad \Rightarrow \dfrac{P}{A} = E\cdot\varepsilon \quad \Rightarrow E = \dfrac{P}{A\varepsilon} = \dfrac{125\cdot 10^3}{(50\cdot 25\cdot 10^{-6})\cdot 500\cdot 10^{-6}}$

$\Rightarrow E = 200\cdot 10^9\ (\text{Pa}) = 200\ (\text{GPa})$

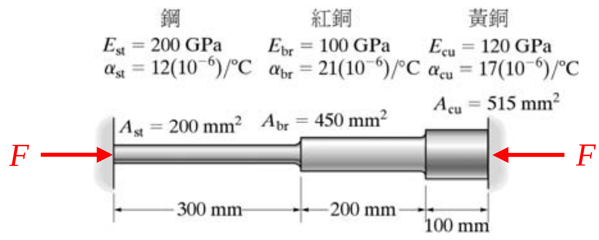
(c) $\varepsilon_{long} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 500\cdot 10^{-6}$

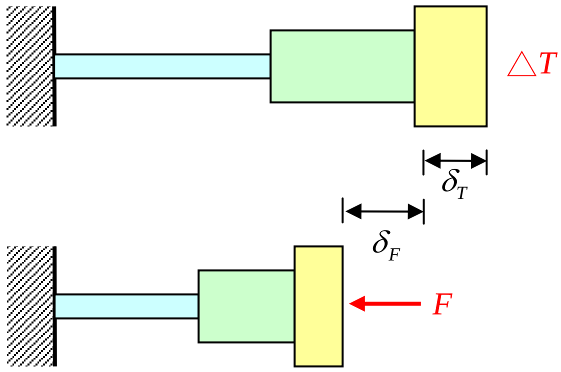
$$\varepsilon_{lat} = \frac{49.9918 - 50}{50} = -164\cdot 10^{-6}$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{lat}}{\varepsilon_{long}} = 0.328$$

4. 三根不同材料棒連接在一起並在 $T_1 = 12°C$ 時置放於兩面牆之間。當溫度 $T_2 = 18°C$ 時，施加在剛性支承點上的力。材料之截面積和物理性質如圖所示。

(20%)





$$\delta_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

$$\delta_F = \frac{PL}{AE}$$

諧和方程式 $\delta = \delta_T - \delta_F = 0$

$$\Rightarrow 0 = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 0.3 + 21 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 0.2 + 17 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 0.1$$

$$- \frac{F \cdot 0.3}{200 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^{9}} - \frac{F \cdot 0.2}{450 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{9}} - \frac{F \cdot 0.1}{515 \cdot 10^{-6} \cdot 120 \cdot 10^{9}}$$

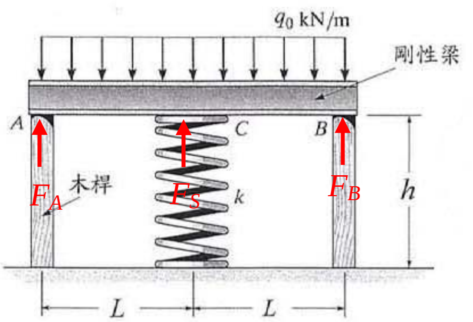
$$\Rightarrow 0 = 57 \cdot 10^{-6} - F\left(\frac{3}{400} + \frac{2}{450} + \frac{1}{618}\right) \cdot 10^{-6}$$

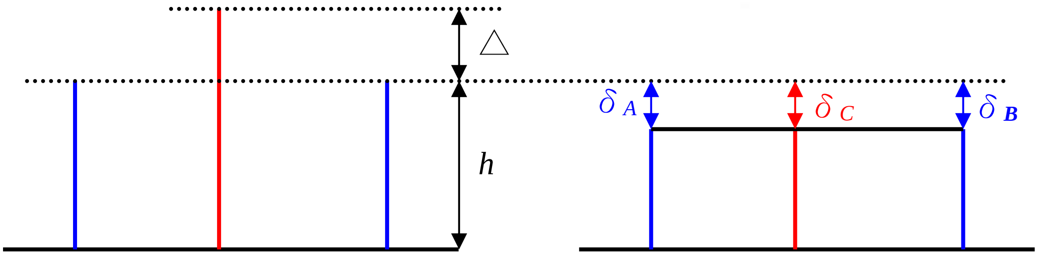
$$\Rightarrow F = 4202.74\,(N) = 4.20\,(\text{kN})$$

5. 如下圖所示，剛性樑由兩根木桿及彈簧所支撐，未加載重之前，每根木桿的長度為 h，截面積為 A，楊氏模數為 E;彈簧的長度為 $h+\Delta$，彈力常數為 k。求施加 q_0 kN/m 之均佈載重後，

(1) 木桿的內力 F_A 及彈簧的內力 F_S 。(14%)

(2) A 點之垂直位移 δ_A 及彈簧的縮短量 δ_S 。(6%) (102 臺科營建丁組)





$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow F_A + F_B + F_S = 2q_0 L \quad \text{... (1)} \quad \delta_s$$

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow F_A = F_B \quad \text{... (2)}$$

相容方程式: $\delta_A = \delta_C = \delta_B$

$F_S = k(\Delta + \delta_C)$ ... (3)

由(1),(2),(3)可得 $F_A = F_B = q_0 L - \dfrac{k}{2}(\Delta + \delta_C)$

$\delta_A = \dfrac{F_A \cdot h}{AE} = \dfrac{1}{AE}[q_0 Lh - \dfrac{kh}{2}(\Delta + \delta_C)]$ 又 $\delta_A = \delta_C$

$\therefore \quad \delta_A(1 + \dfrac{kh}{2AE}) = \dfrac{1}{AE}(q_0 Lh - \dfrac{kh\Delta}{2}) \quad \Rightarrow \delta_A = \dfrac{2q_0 Lh - kh\Delta}{2AE + kh}$

$\therefore$ A 點之垂直位移 $\delta_A = \dfrac{2q_0 Lh - kh\Delta}{2AE + kh}$

又 $\delta_A = \delta_C = \delta_B = \dfrac{2q_0 Lh - kh\Delta}{2AE + kh}$

彈簧縮短量 $\delta_S = \Delta + \delta_C = \Delta + \dfrac{2q_0 Lh - kh\Delta}{2AE + kh} = \dfrac{2AE\Delta + 2q_0 Lh}{2AE + kh}$

木桿的內力 $F_A = q_0 L - \dfrac{kAE\Delta + kq_0 Lh}{2AE + kh}$

彈簧的內力 $F_S = \dfrac{2kAE\Delta + 2kq_0 Lh}{2AE + kh}$