國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 材料力學 2AB 班第二次大考參考解答

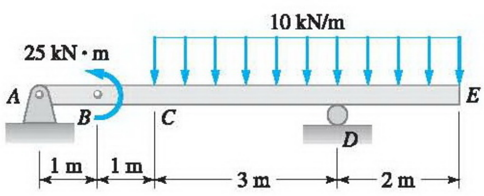
日期：2022 年 06 月 23 日　　姓名：________　　學號：________

考試方式： Open book

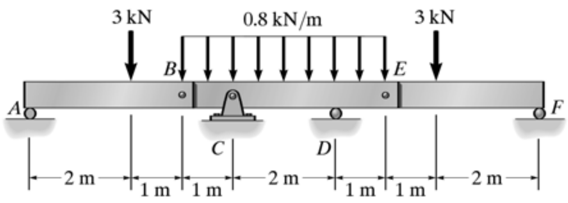
注意事項：
1. 請使用A4 白紙作答，並於每一頁上方標明 **班別**、**學號**、**姓名**與**頁碼**（例如：P.1, P.2, ...）
2. 作答完畢後，請拍照或掃描試卷，並將試卷轉成 PDF 檔。使用學校電子信箱發 e-mail 到 ytlee@mail.ntou.edu.tw。請保留信件內容，已防止如果沒收到你們的 email 時，可由寄件備份再次轉發郵件以當證明。
3. 請自己作答，禁止與他人討論。

1. 請畫出下列各樑之剪力圖與彎矩圖。 (20%)

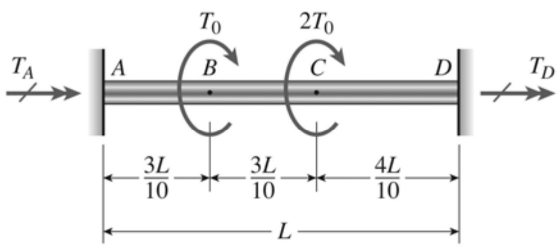
(1)



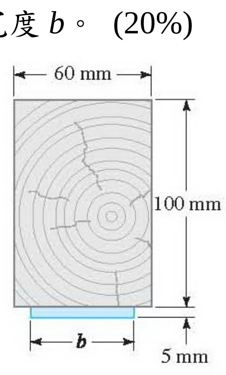
(2) (此三段分別在 B 和 E 處以銷接連結)



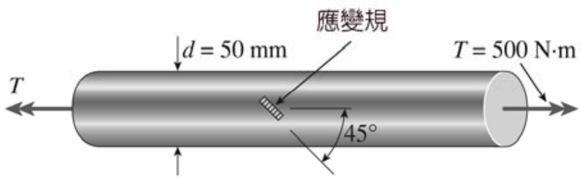
2. 固定支撐的實心圓桿 $ABCD$，受到扭矩 T_0 和 $2T_0$ 作用，其作用方向如下圖所示。
   (1) 試導出桿的最大扭轉角公式 ϕ_{max}。 (10%)
   (2) 若施加在 B 的扭矩 T_0 反向的話，求 ϕ_{max}。 (10%)
   (材料剪力模數為 G，極慣性矩為 J)



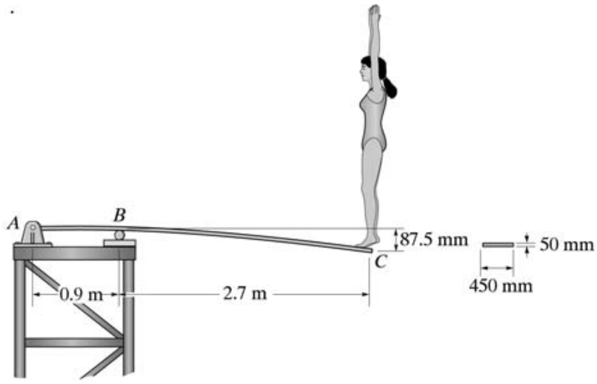
3. 若 $\frac{E_{st}}{E_{wd}} = 20$ 且木材和鋼板同時分別達到其容許應力 8.27 MPa 和 124.11 MPa，試求固定在木樑底端的鋼板寬度 b。 (20%)



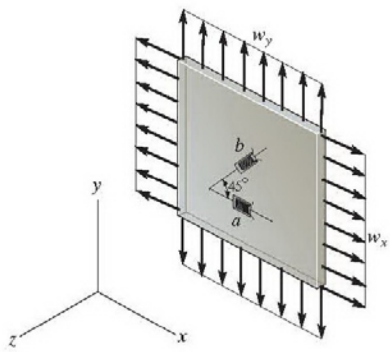
4. 一實心圓桿的直徑 $d = 50$ mm (如下圖所示)，該桿以試驗機進行扭轉，直到施加的扭矩 $T = 500$ N·m 為止。在此扭矩時，與桿軸成 45° 應變規(strain gage)的讀數為 $\varepsilon = 339 \cdot 10^{-6}$。試求材料的剪彈性模數 G。 (15%)



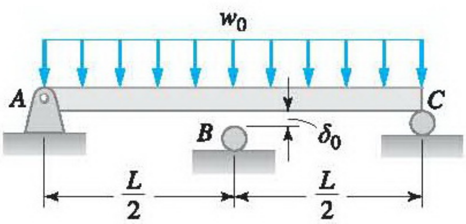
5. 當一跳水者站在跳水板末端 C 點處，其向下撓度為 87.5 mm，試求跳水者的體重、板由彈性模板 $E = 10$ GPa 的材料製成。 (20%)



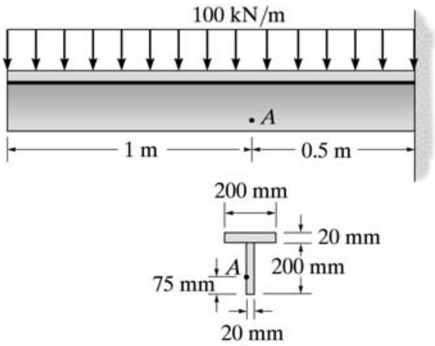
6. 兩應變規貼附於一具彈性模數 $E = 70$ GPa 及蒲松比 $\nu = 0.35$ 的材料板上。若讀數分別為 $\varepsilon_a = 450 \cdot 10^{-6}$ 及 $\varepsilon_a = 100 \cdot 10^{-6}$，試求作用在板上的均佈負載 w_x 和 w_y。板厚為 25 mm。 (15%)



7. 當樑 ABC 未受負荷時，在樑及支承 B 之間有一長度 δ_0 的間隙。已知強度 w_0 的均佈負荷作用下，三個支承反力相等，求 δ_0。 (20%)



8. 一T型樑承受一施加在中心線上的分佈負載。試畫出 *A* 點處的莫爾圓並求其主應力與最大剪應力及其對應之方位。 (20%)

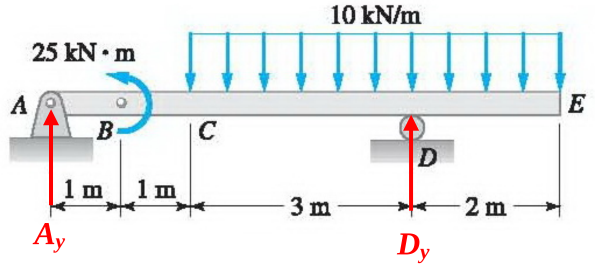


9. 因 Covid-19 疫情影響，以致於本學期後半段材料力學課程皆以遠距教學方式進行授課，針對材料力學的遠距教學授課方式有何感想? (5%) 針對這學期遠距教學上課方式有何建議? (5%) (請各別作答）

參考解答:

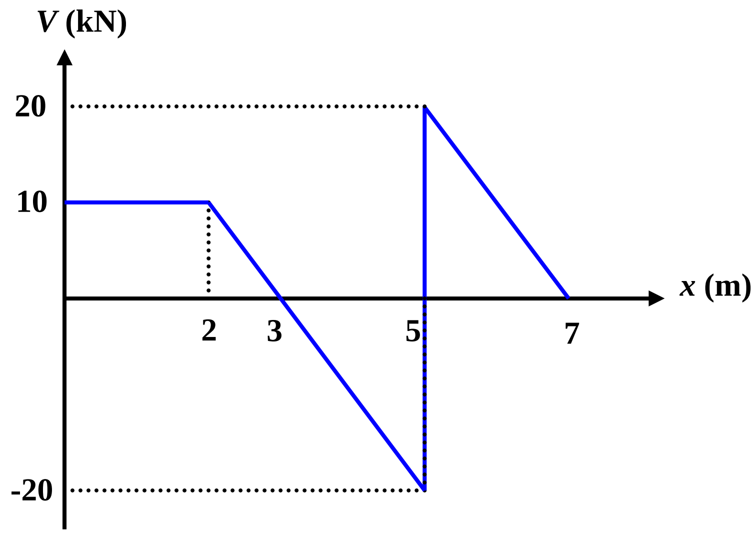
1. 請畫出下列各樑之剪力圖與彎矩圖。 (20%)

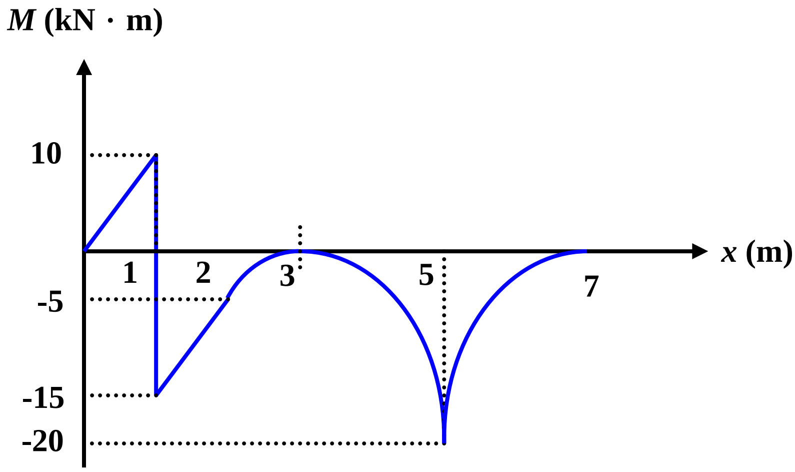
(1)



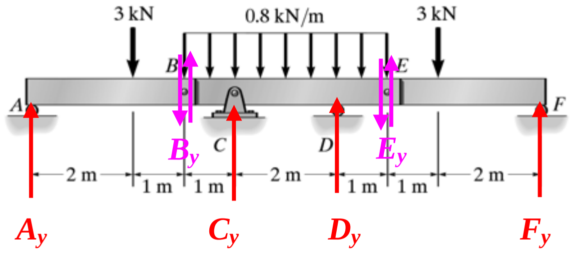
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (10\cdot 5)\cdot 4.5 - 25 - D_y \cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow B_y = 40 \ \ \text{(kN)}$$

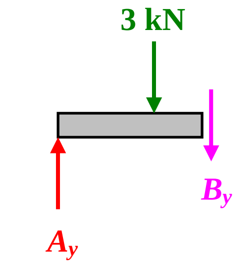
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow A_y + D_y - 10\cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow A_y = 10 \ \ \text{(kN)}$$





(2)



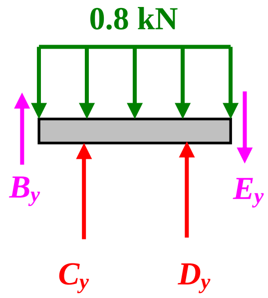


$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow B_y = -2$$

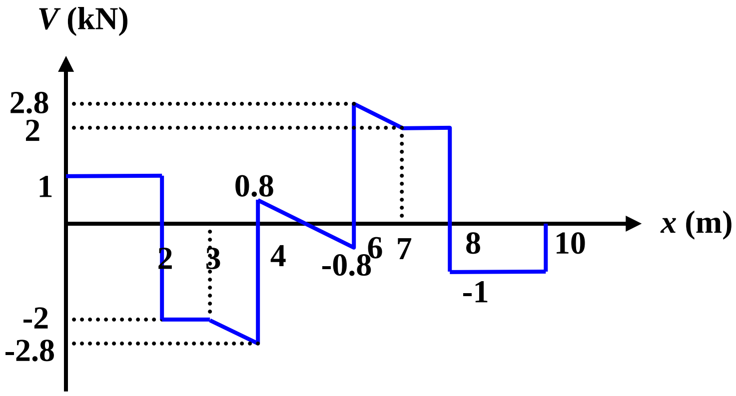
$$\sum P_y = 0 \quad \Rightarrow A_y = 1 \ \text{(kN)}$$

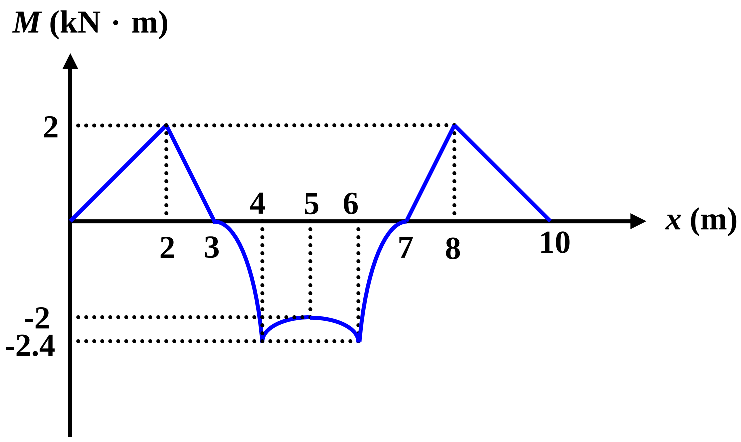
∵ 對稱

$$\therefore \ F_y = A_y = 1 \ \text{(kN)} \qquad \Rightarrow E_y = 2 \ \text{(kN)}$$



$$C_y = D_y = \frac{1}{2}(0.8 \cdot 4 + E_y - B_y) = 3.6 \ \text{(kN)}$$



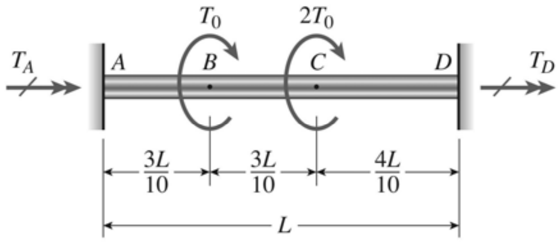


2. 固定支撐的實心圓桿 $ABCD$，受到扭矩 T_0 和 $2T_0$ 作用，其作用方向如下圖所示。

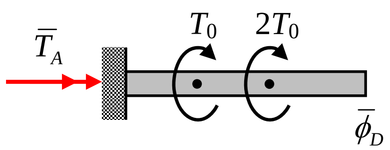
(1) 試導出桿的最大扭轉角公式 ϕ_{max} 。 **(10%)**

(2) 若施加在 B 的扭矩 T_0 反向的話，求 ϕ_{max} 。 **(10%)**

(材料剪力模數為 G，極慣性矩為 J)

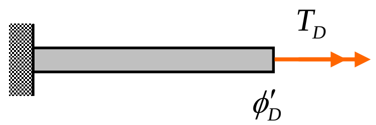


(1) $\sum T=0 \quad \Rightarrow T_A+T_D=3T_0$



$\sum T=0 \quad \Rightarrow \bar{T}_A=3T_0$

$$\bar{\phi}_D=\frac{-\bar{T}_A\cdot\frac{3L}{10}}{JG}+\frac{(-\bar{T}_A+T_0)\cdot\frac{3L}{10}}{JG}=\frac{-\frac{3L}{2}T_0}{JG}$$



$$\phi'_D=\frac{T_D\cdot L}{JG}$$

$\because$ D 端為固定端

$$\therefore \quad \phi_D=\bar{\phi}_D+\phi'_D=0 \quad \Rightarrow \frac{-\frac{3L}{2}T_0}{JG}+\frac{T_D\cdot L}{JG}=0$$

$$\Rightarrow T_D=\frac{3}{2}T_0$$

$$\therefore \quad T_A=\frac{3}{2}T_0$$

AB 段扭矩 $T_{AB}=-\frac{3}{2}T_0$

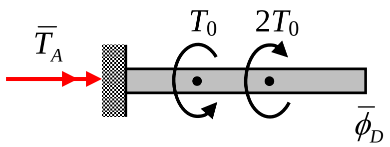
BC 段扭矩 $T_{BC}=-\frac{1}{2}T_0$

CD 段扭矩 $T_{CD}=\frac{3}{2}T_0$

$\therefore$ 扭轉角最大發生在 C 點處 $(x=\frac{3L}{5})$

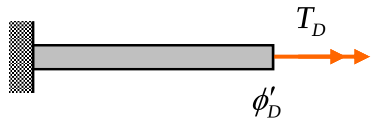
$$\phi_{max}=\frac{\frac{4L}{10}T_D}{JG}=\frac{\frac{4L}{10}\cdot\frac{3}{2}T_0}{JG}=\frac{3}{5}\frac{LT_0}{JG}$$

(2) $\sum T = 0 \quad \Rightarrow T_A + T_D = T_0$



$\sum T = 0 \quad \Rightarrow \bar{T}_A = T_0$

$$\bar{\phi}_D = \frac{-\bar{T}_A \cdot \frac{3L}{10}}{JG} + \frac{(-\bar{T}_A - T_0)\cdot\frac{3L}{10}}{JG} = \frac{-\frac{9L}{10}T_0}{JG}$$



$$\phi'_D = \frac{T_D \cdot L}{JG}$$

$\because$ D 端為固定端

$$\therefore \quad \phi_D = \bar{\phi}_D + \phi'_D = 0 \quad \Rightarrow \frac{-\frac{9L}{10}T_0}{JG} + \frac{T_D \cdot L}{JG} = 0$$

$$\Rightarrow T_D = \frac{9}{10}T_0$$

$$\therefore \quad T_A = \frac{1}{10}T_0$$

AB 段扭矩 $T_{AB} = -\frac{1}{10}T_0$

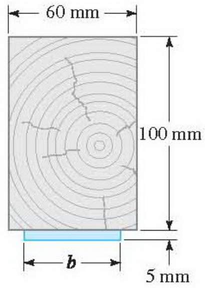
BC 段扭矩 $T_{BC} = -\frac{11}{10}T_0$

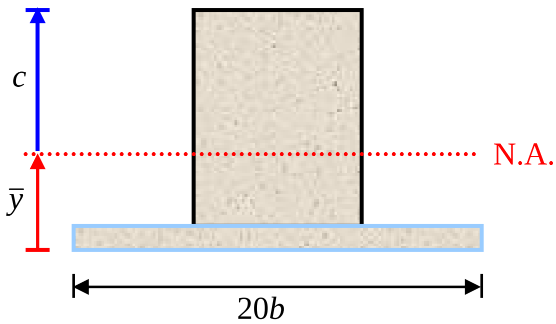
CD 段扭矩 $T_{CD} = \frac{9}{10}T_0$

$\therefore$扭轉角最大發生在 C 點處 $(x = \frac{3L}{5})$

$$\phi_{\max} = \frac{\frac{4L}{10}T_D}{JG} = \frac{\frac{4L}{10}\cdot\frac{9}{10}T_0}{JG} = \frac{9}{25}\frac{LT_0}{JG}$$

3. 若 $\dfrac{E_{st}}{E_{wd}}=20$ 且木材和鋼板同時分別達到其容許應力 **8.27 MPa** 和 **124.11 MPa**，試求固定在木樑底端的鋼板寬度 ***b***。 **(20%)**





$$n=\frac{E_{st}}{E_{wd}}=20$$

$$\sigma_{wood}=\frac{M\,c}{I},\quad \sigma_{steel}=n\cdot\frac{M\,\bar{y}}{I}\quad\Rightarrow\frac{\sigma_{wood}}{\sigma_{steel}}=\frac{c}{n\cdot\bar{y}}=\frac{105-\bar{y}}{20\bar{y}}$$

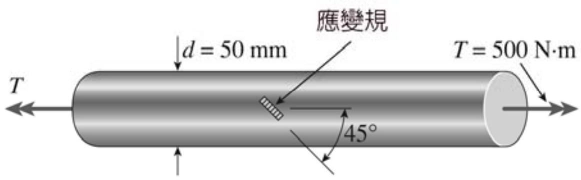
$$\Rightarrow\frac{8.27}{124.11}=\frac{105-\bar{y}}{20\bar{y}}$$

$$\Rightarrow\bar{y}=\frac{124.11\cdot 105}{20\cdot 8.27+124.11}=45\ \text{(mm)}$$

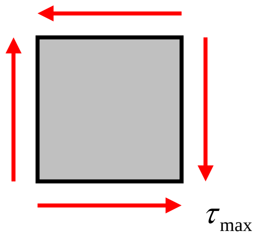
又 $\bar{y}=\dfrac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}\quad\Rightarrow 45=\dfrac{(60\cdot 100)\cdot 55+(20b\cdot 5)\cdot 2.5}{(60\cdot 100)+(20b\cdot 5)}$

$$\Rightarrow b=\frac{(60\cdot 100)\cdot 55-45\cdot(60\cdot 100)}{20\cdot 5\cdot(45-2.5)}=14.12\ \text{(mm)}$$

4. 一實心圓桿的直徑 $d = 50$ mm (如下圖所示)，該桿以試驗機進行扭轉，直到施加的扭矩 $T = 500\ \text{N}\cdot\text{m}$ 為止。在此扭矩時，與桿軸成 45° 應變規(strain gage)的讀數為 $\varepsilon = 339\cdot 10^{-6}$。試求材料的剪彈性模數 G。 (15%)



$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} = \frac{500\cdot\frac{50}{2}\cdot 10^{-3}}{\frac{\pi}{2}(\frac{50}{2})^4\cdot 10^{-12}} = 20.37\cdot 10^{6}\ (\text{Pa}) = 20.3718\ (\text{MPa})$$



元素處於純剪狀態，故此為最大剪應力所在平面

即 $\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \Rightarrow \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{G}\tau_{\max}$$

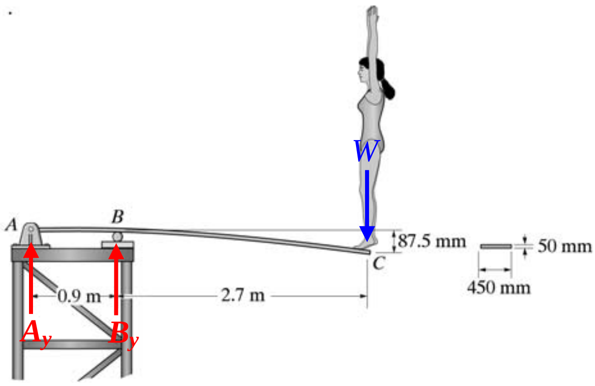
又最大剪應力平面與主應力平面差 45°

$$\therefore \text{可知}\quad \varepsilon_{\max} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2})^2 + (\frac{\gamma_{\max}}{2})} = \frac{\gamma_{\max}}{2}$$

$$\Rightarrow \gamma_{\max} = 2\varepsilon_{\max} = 678\cdot 10^{-6}$$

$$\therefore\quad \gamma_{\max} = \frac{1}{G}\tau_{\max} \Rightarrow G = \frac{\tau_{\max}}{\gamma_{\max}} = \frac{20.3718\cdot 10^{6}}{678\cdot 10^{-6}} = 30.05\cdot 10^{9}\ (\text{Pa}) = 30.05\ (\text{GPa})$$

5. 當一跳水者站在跳水板末端 C 點處，其向下撓度為 87.5 mm，試求跳水者的體重、板由彈性模板 $E = 10$ GPa 的材料製成。 (20%)



$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow A_y = -3W$

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow B_y = 4W$

$0 \le x_1 \le 0.9$

$M_1 = A_y \cdot x_1 = -3W x_1$

$EI \dfrac{d^2 v_1}{dx_1^2} = M_1 = -3W x_1 \quad \Rightarrow EI \dfrac{dv_1}{dx_1} = -\dfrac{3}{2} W x_1^2 + C_1$

$\Rightarrow EIv_1 = -\dfrac{1}{2} W x_1^3 + C_1 x_1 + C_2$

$0.9 \le x_2 \le 3.6$

$M_2 = B_y \cdot (x_2 - 0.9) + A_y \cdot x_2 = W x_2 - 3.6W$

$EI \dfrac{d^2 v_2}{dx_2^2} = M_2 = W x_2 - 3.6W \quad \Rightarrow EI \dfrac{dv_2}{dx_2} = \dfrac{1}{2} W x_2^2 - 3.6W x_2 + C_3$

$\Rightarrow EIv_2 = \dfrac{1}{6} W x_2^3 - 1.8W x_2^2 + C_3 x_2 + C_4$

由邊界條件可知: $v_1(0) = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0$

$v_1(0.9) = 0 \quad \Rightarrow C_1 = \dfrac{1}{2} W x_1^2 = 0.405W$ ... (1)

$v_2(0.9) = 0 \quad \Rightarrow 0.9C_3 + C_4 = 1.3365W$ ...(2)

由連續條件可知: $\left.\dfrac{dv_1}{dx_1}\right|_{x_1=0.9} = \left.\dfrac{dv_2}{dx_2}\right|_{x_2=0.9} \quad \Rightarrow C_1 - C_3 = -1.62W$ ...(3)

由(1)、(3)可知 $C_3 = 2.025W$ 代回(2)可得 $C_4 = -0.486W$

$EIv_2 = \dfrac{1}{6} W x_2^3 - 1.8W x_2^2 + 2.025W x_2 - 0.486W$

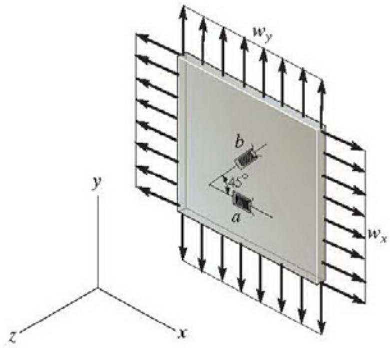
$$I = \frac{1}{12} \cdot 450 \cdot 50^3 = 4.6875 \cdot 10^6 \ (\text{mm}^4) = 4.6875 \cdot 10^{-6} \ (\text{m}^4)$$

又 $v_2(3.6) = -87.5 \cdot 10^{-3} \ (\text{m})$ $\Rightarrow W = \dfrac{-87.5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 4.6875 \cdot 10^{-6}}{\frac{1}{6} \cdot 3.6^3 - 1.8 \cdot 3.6^2 + 2.025 \cdot 3.6 - 0.486}$

$$= 468.857 \ (\text{N})$$

$$= 47.79 \ (\text{kg})$$

6. 兩應變規貼附於一具彈性模數 $E = 70$ GPa 及蒲松比 $\nu = 0.35$ 的材料板上。若讀數分別為 $\varepsilon_a = 450 \cdot 10^{-6}$ 及 $\varepsilon_b = 100 \cdot 10^{-6}$，試求作用在板上的均佈負載 w_x 和 w_y。板厚為 **25 mm**。 **(15%)**



由圖可知此為平面主應力狀態（$\sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = 0 \;\; \Rightarrow \gamma_{xy} = 0$）

$$\sigma_x = \frac{w_x}{t} = \frac{w_x}{25 \cdot 10^{-3}}, \quad \sigma_y = \frac{w_y}{t} = \frac{w_y}{25 \cdot 10^{-3}}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

又 $\varepsilon_a = \varepsilon_x \cdot \cos^2\theta_a + \varepsilon_y \cdot \sin^2\theta_a + \gamma_{xy} \sin\theta_a \cdot \cos\theta_a$

$$\Rightarrow 450 \cdot 10^{-6} = \varepsilon_x \cdot \cos^2 0° + \varepsilon_y \cdot \sin^2 0° + \gamma_{xy} \sin 0° \cdot \cos 0° \quad \Rightarrow \varepsilon_x = 450 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cdot \cos^2\theta_b + \varepsilon_y \cdot \sin^2\theta_b + \gamma_{xy} \sin\theta_b \cdot \cos\theta_b$$

$$\Rightarrow 100 \cdot 10^{-6} = \varepsilon_x \cdot \cos^2 45° + \varepsilon_y \cdot \sin^2 45° + \gamma_{xy} \sin 45° \cdot \cos 45° \quad \Rightarrow \varepsilon_y = -250 \cdot 10^{-6}$$

$$\therefore \quad 450 \cdot 10^{-6} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$-250 \cdot 10^{-6} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

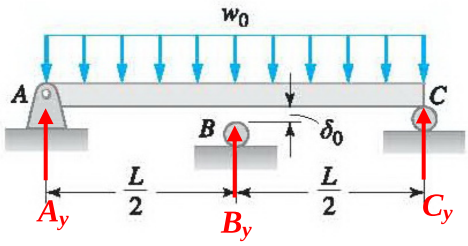
$$\Rightarrow \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_x = 450 \cdot 10^{-6} - \nu \cdot 250 \cdot 10^{-6} \quad \Rightarrow \sigma_x = 28.917 \cdot 10^6 \text{ (Pa)}$$

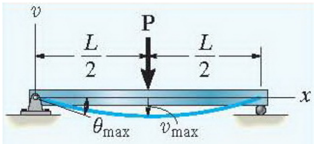
$$\Rightarrow \sigma_y = -7.379 \cdot 10^6 \text{ (Pa)}$$

$$\therefore \quad \sigma_x = \frac{w_x}{25 \cdot 10^{-3}} \quad w_x = 25 \cdot 10^{-3} \cdot \sigma_x = 722.925 \cdot 10^3 \text{ (N/m)} = 722.925 \text{ (kN/m)}$$

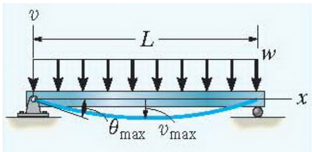
$$\sigma_y = \frac{w_y}{25 \cdot 10^{-3}} \quad \Rightarrow w_y = 25 \cdot 10^{-3} \cdot \sigma_y = -184.925 \cdot 10^3 \text{ (N/m)} = -184.925 \text{ (kN/m)}$$

7. 當樑 ***ABC*** 未受負荷時，在樑及支承 ***B*** 之間有一長度 δ_0 的間隙。已知強度 w_0 的均佈負荷作用下，三個支承反力相等，求 δ_0 。 **(20%)**





$$v_{\max} = -\frac{PL^3}{48EI}$$



$$v_{\max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

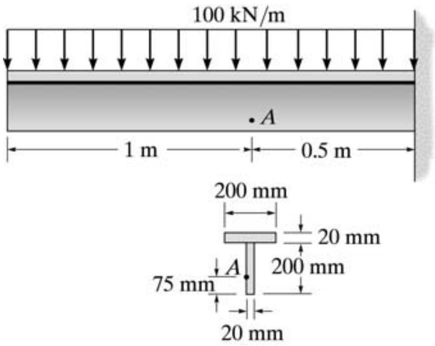
$$-\delta_0 = -\frac{5w_0L^4}{384EI} + \frac{B_yL^3}{48EI}$$

∵ 三個支承反力相等

$$\therefore \quad A_y = B_y = C_y = \frac{w_0L}{3}$$

故 $\delta_0 = \frac{5w_0L^4}{384EI} - \frac{B_yL^3}{48EI} = \frac{5w_0L^4}{384EI} - \frac{w_0L^4}{144EI} = \frac{7w_0L^4}{1152EI}$

8. 一 T 型樑承受一施加在中心線上的分佈負載。試畫出 A 點處的莫爾圓並求其主應力與最大剪應力及其對應之方位。 **(20%)**



中性軸位置： $\bar{y} = \dfrac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \dfrac{(200\cdot 20)\cdot 210 + (20\cdot 200)\cdot 100}{200\cdot 20 + 20\cdot 200} = 155\ (\text{mm})$

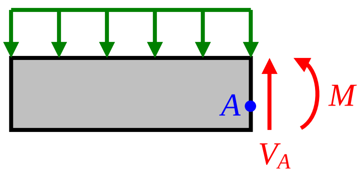
斷面慣性矩： $I = \dfrac{1}{12}\cdot 200\cdot 20^3 + (200\cdot 20)\cdot(210-155)^2$

$+\dfrac{1}{12}\cdot 20\cdot 200^3 + (20\cdot 200)\cdot(155-100)^2$

$= \dfrac{113}{3}\cdot 10^6\ (\text{mm}^4) = \dfrac{113}{3}\cdot 10^{-6}\ (\text{m}^4)$

$Q_A = (200\cdot 20)\cdot(210-155) + 20\cdot(200-75)\cdot(\dfrac{200-75}{2} + 75 - 155)$

$= 0.17625\cdot 10^6\ (\text{mm}^3) = 0.17625\cdot 10^{-3}\ (\text{m}^3)$



$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow V_A = 100\ (\text{kN})$

$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow M = -50\ (\text{kN}\cdot\text{m})$

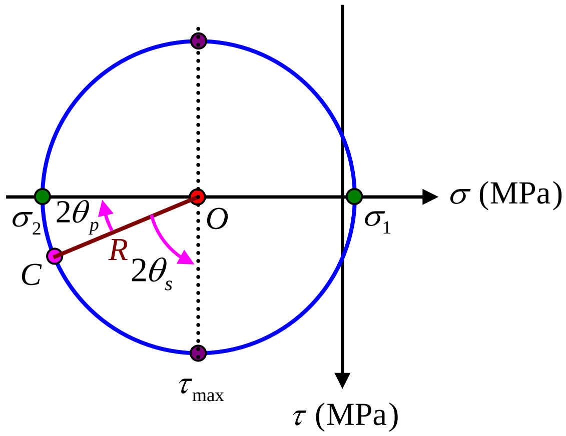
$\sigma = -\dfrac{My}{I} = -\dfrac{(-50\cdot 10^3)\cdot(75-155)\cdot 10^{-3}}{\frac{113}{3}\cdot 10^{-6}} = -\dfrac{12000}{113}\cdot 10^{-6}\ (\text{Pa}) = -106.20\ (\text{MPa})$

$\tau = \dfrac{V_A Q_A}{It} = \dfrac{100\cdot 10^3\cdot 0.17625\cdot 10^{-3}}{\frac{113}{3}\cdot 10^{-6}\cdot 20\cdot 10^{-3}} = 23.40\cdot 10^6\ (Pa) = 23.40\ (\text{MPa})$

A 點應力狀態 $\sigma_x = -106.20\ (\text{MPa})$， $\sigma_y = 0\ (\text{MPa})$， $\tau_{xy} = 23.40\ (\text{MPa})$

A 點 x 面應力狀態 C 點座標 $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (-106.20, 23.40)$

圓心 O 點座標 $(\sigma_{avg}, 0) = (\dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0) = (-53.10, 0)$



$$R=\sqrt{[(-106.2-(-53.10)]^2+23.40^2}=58.03$$

$$\sigma_1=\sigma_{avg}+R=-53.10+58.03=4.93\ \ \text{(MPa)}$$

$$\sigma_2=\sigma_{avg}-R=-53.10-58.03=-111.13\ \ \text{(MPa)}$$

$$\tau_{\max}=R=58.03\ \ \text{(MPa)}$$

$$\tan 2\theta_p=\frac{23.40}{106.20-53.10}\quad\Rightarrow 2\theta_p=\tan^{-1}(\frac{2.0372}{0.5093})=0.4151\,\text{(rad)}=23.78^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_p=11.89^\circ\ \ (\text{順時鐘方向})$$

$$2\theta_p+2\theta_s=90^\circ\quad\Rightarrow 2\theta_s=66.22^\circ\ \ \Rightarrow \theta_s=33.11^\circ\ \ (\text{逆時鐘方向})$$