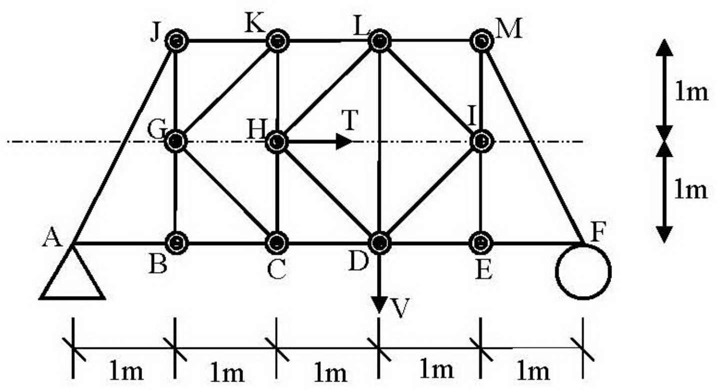
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 材料力學 2AB 班第一次大考參考解答

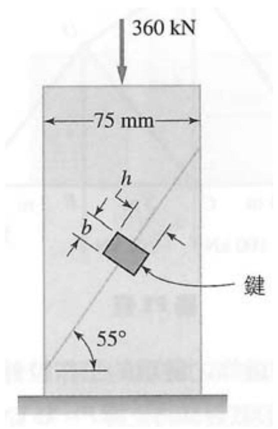
日期：2022 年 05 月 05 日　　姓名：______________　　學號：______________

1. 如圖一所示，有一桁架系統，桿件之間都以插銷(pin)連接。桁架在A處為鉸支承(hinge support)，在F處為滾支承(roller support)。在H節點處有一水平力 $T=3P$ (N)，在節點D處有一垂直向下的力 $V=2P$ (N)。桿件節點AB、BC、CD、DE、EF、JK、KL、LM、GJ、BG、HK、CH、EI、IM長度均為1m。且角IEF、LMI、DEI、CDL、HKL、GJK、GBC與ABG均為直角。圖一中◎為各節點上之插銷，△為A處的鉸支承，而◯為F處的滾支承。
   (1) 試問何者為零力桿件，並求A與F處之支承反力。 (10%)
   (2) 若每根桿件之截面積均為 $1200\ \text{mm}^2$ 並且每根桿件所能承受之最大應力為 48 MPa ，試求P最大為多少? (10%)

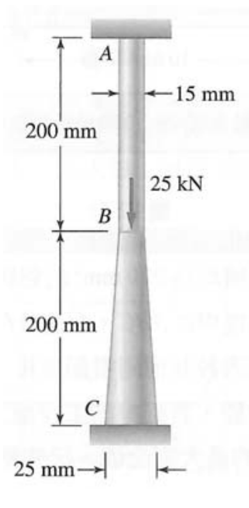


圖一

2. 如圖二所示，一截面為 $75\ \text{mm}\times 75\ \text{mm}$ 的鑄鐵塊係由兩部分接合所成。長 75 mm 的鋼鍵防止組合的兩部分沿 55° 的接合面滑動。若鑄鐵的工作承載應力為 240 MPa，鍵的工作剪應力為 300 MPa，試求鍵的最小安全尺寸 b 與 h 。（請四捨五入後算至小數點後第二位）　(20%)



圖二



圖三

3. 如圖三所示之圓形截面鋼柱在A點與C點處受到剛性支撐。試求在 25 kN 負荷作用下，柱中之最大應力。 (20%)

4. 如圖四所示之實心圓桿AB，其長$L = 400\ \mathrm{mm}$，直徑$d = 16\ \mathrm{mm}$。圓桿AB受到拉力$P = 60\ \mathrm{kN}$作用，若實心圓桿AB之應力應變關係為:

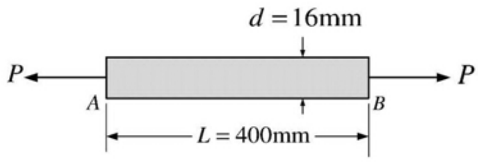
$$\sigma = \frac{124000\varepsilon}{1+300\varepsilon} \quad 當 \quad 0 \le \varepsilon \le 0.03 \text{（}\sigma\text{ 的單位為MPa）}$$

若圓桿AB之楊氏模數$E = 124\ \mathrm{GPa}$，試求:

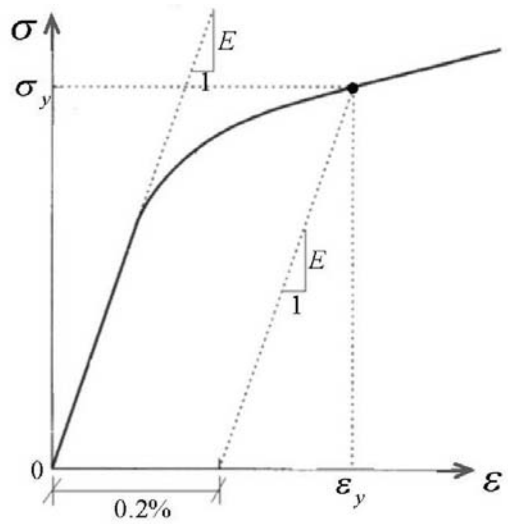
(1) 0.2%偏差降伏應力(offset yield stress)σ_y (參考示意圖四(b)) (8%)

(2) 當拉力$P = 60\ \mathrm{kN}$作用時，圓桿AB之伸長量$\delta = ?$ (6%)

(3) 卸載後，圓桿之永久伸長量$\delta_p = ?$ (6%)



圖四(a)



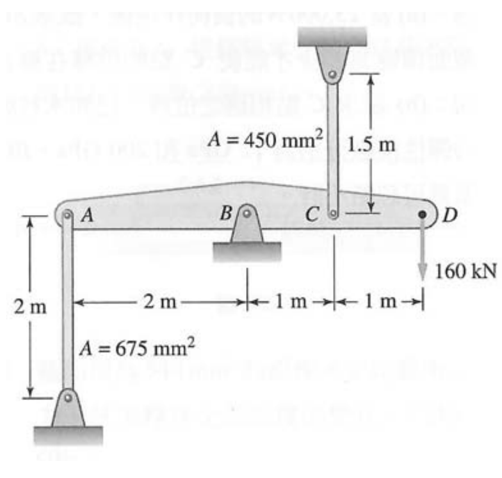
圖四(b)

5. 如圖五所示，重量可忽略不計的剛性桿件$ABCD$一開始呈水平狀態。而在A點與C點處連結的鋼桿也處於無應力狀態，試求:

(1) 在$160\ \mathrm{kN}$的負荷作用後，每根鋼桿之應力。 (10%)

(2) 施加$160\ \mathrm{kN}$的負荷，同時鋼桿的溫度產生ΔT的變化。若兩根桿件要有相同的應力，則ΔT為多少? (10%)

（已知鋼的$\alpha = 12\times10^{-6}/°C$和$E = 200\ \mathrm{GPa}$）



圖五

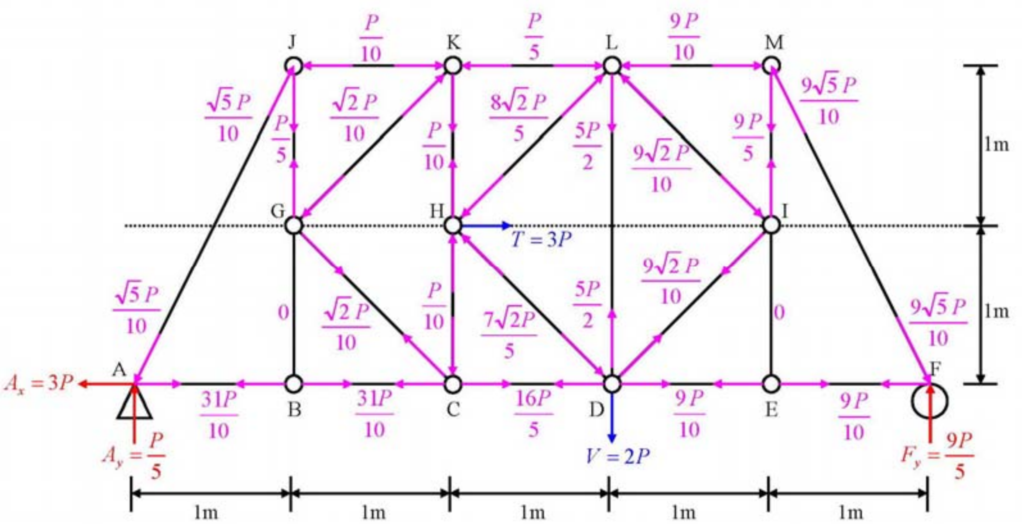
1. 如圖一所示，有一桁架系統，桿件之間都以插銷(pin)連接。桁架在A處為鉸支承(hinge support)，在F處為滾支承(roller support)。在H節點處有一水平力 $T = 3P$ (N)**，在節點D處有一垂直向下的力** $V = 2P$ (N)**。桿件節點AB、BC、CD、DE、EF、JK、KL、LM、GJ、BG、HK、CH、EI、IM長度均為1m。且角IEF、LMI、DEI、CDL、HKL、GJK、GBC與ABG均為直角。圖一中◎為各節點上之插銷，△為A處的鉸支承，而◯為F處的滾支承。**

(1) 試問何者為零力桿件，並求A與F處之支承反力。 (10%)

(2) 若每根桿件之截面積均為 $1200\ \text{mm}^2$ **並且每根桿件所能承受之最大應力為** $48\ \text{MPa}$ **，試求*P*最大為多少? (10%)**

(1) 零力桿件 BG、EI桿件。

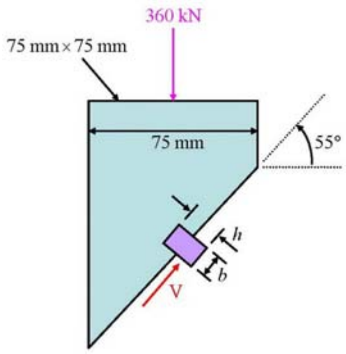
支承反力 $A_x = 3P\ (\leftarrow)$，$A_y = \dfrac{P}{5}\ (\uparrow)$，$F_y = \dfrac{9P}{5}\ (\uparrow)$



(2) 最大受力桿件為CD桿， $F_{CD} = \dfrac{16P}{5}$

$$\therefore\ \sigma = \frac{F}{A} \quad \Rightarrow 48 \cdot 10^6 = \frac{\frac{16}{5}P}{1200 \cdot 10^{-6}} \quad \Rightarrow P = 18000\ (\text{N}) \quad \Rightarrow P = 18\ (\text{kN})$$

2. 如圖二所示，一截面為$75\text{ mm}\times 75\text{ mm}$的鑄鐵塊係由兩部分接合所成。長$75\text{ mm}$的鋼鍵防止組合的兩部分沿$55^\circ$的接合面滑動。若鑄鐵的工作承載應力為240 MPa，鍵的工作剪應力為300 MPa，試求鍵的最小安全尺寸b與h。（請四捨五入後算至小數點後第二位） (20%)



鑄鐵厚度 $t = 75\text{ mm}$

$V = 360 \cdot \sin 55^\circ = 294.9\text{ (kN)}$

$\because$ 鍵的工作剪應力為300 MPa

$\therefore$ 可知 $V = \tau \cdot (b \cdot t) \quad \Rightarrow 294.9 \cdot 10^3 = (300 \cdot 10^6) \cdot (b \cdot 75 \cdot 10^{-6})$

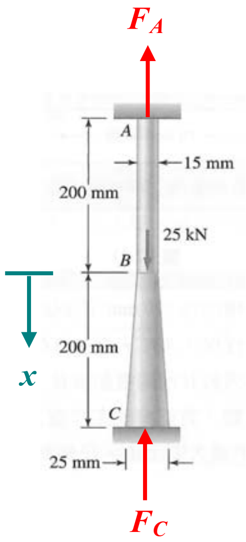
$\Rightarrow b = 13.11\text{ (mm)}$

$\because$ 鑄鐵的工作承載應力為240 MPa

$\therefore$ 可知 $V = \sigma \cdot (\frac{h}{2} \cdot t) \quad \Rightarrow 294.9 \cdot 10^3 = (240 \cdot 10^6) \cdot (\frac{h}{2} \cdot 75 \cdot 10^{-6})$

$\Rightarrow h = 32.77\text{ (mm)}$

3. 如圖三所示之圓形截面鋼柱在*A*點與*C*點處受到剛性支撐。試求在 25 kN 負荷作用下，柱中之最大應力。 **(20%)**



$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow F_A + F_C = 25\cdot 10^3$ ...... (1)

此為一度靜不定，需要引入一條諧和方程

由幾何條件可知，A、C 兩端皆為固定端

$\therefore C$ 點相對於 A 點沒有位移，即 $\delta_{C/A} = 0$

由 $\delta_{C/A} = 0 \quad \Rightarrow \delta_{B/A} - \delta_{C/B} = 0$

$$\Rightarrow \frac{F_A \cdot 0.2}{\pi(\frac{0.015}{2})^2 \cdot E} - \int_0^{0.2} \frac{F_C}{\pi(\frac{0.015+0.05x}{2})^2 \cdot E} dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3555.56}{\pi E} F_A + \frac{F_C}{\pi E} \cdot \left. \frac{4}{0.05\cdot(0.015+0.05x)} \right|_0^{0.2} = 0$$

$$\Rightarrow 3555.56 F_A - 2133.33 F_C = 0$$

$$\Rightarrow F_A = 0.6 F_C \quad ...... (2)$$

由(1)與(2)可得 $F_C = \dfrac{25\cdot 10^3}{1.6} = 15625$ (N)

代回(2)可得 $F_A = 0.6\cdot 15625 = 9375$ (N)

$\therefore$ 可知桿內應力最大在 BC 段靠近 B 側

即 $\sigma_{\max} = \dfrac{F_C}{A_B} = \dfrac{15625}{\pi(\frac{0.015}{2})^2} = 88.42\cdot 10^6$ (Pa) $= 88.42$ (MPa) (壓)

4. 如圖四所示之實心圓桿AB，其長$L = 400\text{ mm}$，直徑$d = 16\text{ mm}$。圓桿AB受到拉力$P = 60\text{ kN}$作用，若實心圓桿AB之應力應變關係為:

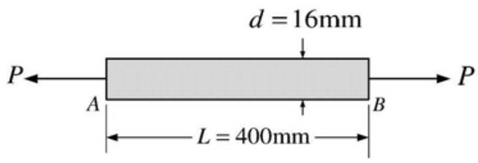
$$\sigma = \frac{124000\varepsilon}{1+300\varepsilon} \quad \text{當} \quad 0 \le \varepsilon \le 0.03 \text{（}\sigma\text{ 的單位為MPa）}$$

若圓桿AB之楊氏模數$E = 124\text{ GPa}$，試求:

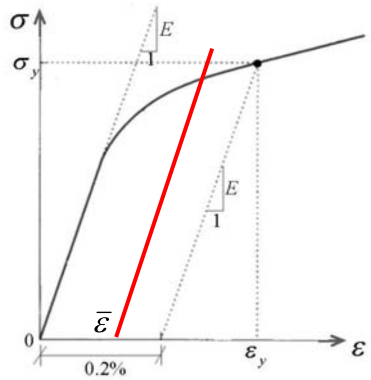
(1) 0.2% 偏差降伏應力**(offset yield stress)**σ_y **(參考示意圖四(b)) (8%)**

(2) 當拉力$P = 60\text{ kN}$作用時，圓桿AB之伸長量$\delta = ?$ **(6%)**

(3) 卸載後，圓桿之永久伸長量$\delta_P = ?$ **(6%)**



圖四(a)



圖四(b)

(1) AB 桿的初始斜率為 $E = 124\text{ GPa}$

且ε偏差0.2%後得到σ_y而此偏差虛線之斜率亦與初始斜率相互平行

故由圖可知 $E = \dfrac{\sigma_y}{\varepsilon_y - 0.002} \Rightarrow \sigma_y = E \cdot (\varepsilon_y - 0.002)$

又由題目公式可知 $\sigma_y = \dfrac{124000\varepsilon_y}{1+300\varepsilon_y}$ （σ 的單位為MPa）

故可得 $E \cdot (\varepsilon_y - 0.002) = \dfrac{124000\varepsilon_y}{1+300\varepsilon_y}$

$$\Rightarrow 124000 \cdot (\varepsilon_y - 0.002) = \frac{124000\varepsilon_y}{1+300\varepsilon_y}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y = (\varepsilon_y - 0.002)(1+300\varepsilon_y)$$

$$\Rightarrow 300\varepsilon_y^2 - 0.6\varepsilon_y - 0.002 = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y = 0.003769 \quad \text{or} \quad -0.001769 \text{ (不合)}$$

代回公式可得 $\sigma_y = \dfrac{124000 \cdot 0.003769}{1+300 \cdot 0.003769} = 219.344\text{ (MPa)}$

(2) $P = 60\ \text{kN} \quad \Rightarrow \sigma = \dfrac{P}{A} = \dfrac{60 \cdot 10^3}{\pi \cdot (\dfrac{16}{2})^2 \cdot 10^{-6}} = 298.416 \cdot 10^{-6}\ (\text{Pa}) = 298.416\ (\text{MPa})$

由公式 $\sigma = \dfrac{124000\varepsilon}{1 + 300\varepsilon}$

可知 $298.416 = \dfrac{124000\varepsilon}{1 + 300\varepsilon} \quad \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{298.416}{124000 - 298.416 \cdot 300} = 0.008656$

圓桿 AB 之伸長量 $\delta = \varepsilon \cdot L = 0.008656 \cdot 400 = 3.4624\ (\text{mm})$

(3) 外力卸載後沿彈性恢復(如紅線所示)，所以殘留應變為 $\bar{\varepsilon}$

$\therefore \quad E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon - \bar{\varepsilon}} \quad \Rightarrow 124000 = \dfrac{298.416}{0.008656 - \bar{\varepsilon}}$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = 0.008656 - \frac{298.416}{124000} = 0.006249$$

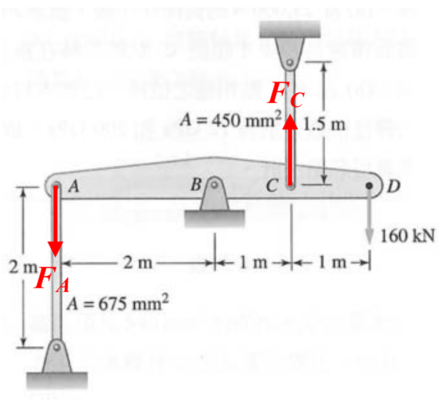
永久伸長量 $\delta_P = \bar{\varepsilon} \cdot L = 0.006249 \cdot 400 = 2.4996\ (\text{mm})$

5. 如圖五所示，重量可忽略不計的剛性桿件$ABCD$一開始呈水平狀態。而在A點與C點處連結的鋼桿也處於無應力狀態，試求:

(1) 在160 kN的負荷作用後，每根鋼桿之應力。 (10%)

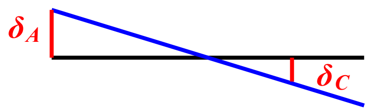
(2) 施加160 kN的負荷，同時鋼桿的溫度產生ΔT的變化。若兩根桿件要有相同的應力，則ΔT為多少? (10%)

（已知鋼的$\alpha = 12\times 10^{-6}/°C$和$E = 200$ GPa）



(1) $\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow 2F_A + F_C = 2\cdot 160\cdot 10^3$ ...... (1)

$ABCD$為剛性桿件



由幾何條件可知 $\delta_A = 2\delta_C$

$$\Rightarrow \frac{F_A\cdot 2}{675\cdot 10^{-6}\cdot E} = 2\frac{F_C\cdot 1.5}{450\cdot 10^{-6}\cdot E}$$

$$\Rightarrow F_A = 2.25F_C \quad \text{...... (2)}$$

代回(1)可得 $F_C = \dfrac{2\cdot 160\cdot 10^3}{5.5} = 58.18\cdot 10^3\ (\text{N}) = 58.18\ (\text{kN})$

$\therefore\ F_A = 130.91\ (\text{kN})$

$$\sigma_A = \frac{130.91\cdot 10^3}{675\cdot 10^{-6}} = 193.94\cdot 10^6\ (\text{Pa}) = 193.94\ (\text{MPa})\ \ (拉)$$

$$\sigma_C = \frac{58.18\cdot 10^3}{450\cdot 10^{-6}} = 129.29\cdot 10^6\ (\text{Pa}) = 129.29\ (\text{MPa})\ \ (拉)$$

(2) 施加160 kN的負荷，同時鋼桿溫度ΔT變化且兩根桿件有相同的應力

即 $\sigma_A = \sigma_C \quad \Rightarrow F_A = F_C\cdot\dfrac{A_A}{A_C} \quad \Rightarrow F_A = 1.5F_C$ ...... (3)

代回(1)可得 $F_C = 80\cdot 10^3\ (\text{N}) = 80\ (\text{kN})$

$\therefore\ F_A = 120\ (\text{kN})$

故可得 $\sigma_A = \sigma_C = \dfrac{80 \cdot 10^3}{450 \cdot 10^{-6}} = 177.78 \cdot 10^6\ (\text{Pa}) = 193.94\ (\text{MPa})$

由幾何條件可知 $\delta_A = 2\delta_C$

$$\alpha \cdot \Delta T \cdot L_A + \frac{F_A \cdot L_A}{A_A \cdot E} = 2(\alpha \cdot \Delta T \cdot L_C + \frac{F_C \cdot L_C}{A_C \cdot E})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{E}(\sigma_A L_A - 2\sigma_C L_C) = \alpha \cdot \Delta T \cdot (2L_C - L_A)$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{1}{\alpha \cdot E} \cdot \frac{\sigma_A L_A - 2\sigma_C L_C}{2L_C - L_A} = \frac{1}{12 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^9} \cdot \frac{177.78 \cdot 10^6 \cdot (2 - 2 \cdot 1.5)}{2 \cdot 1.5 - 2}$$

$$= -74.075^\circ$$