

考試方式：Open book

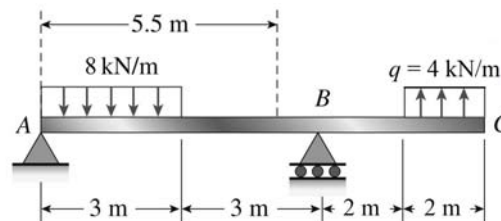
- 注意事項：
1. 請使用 A4 白紙作答，並於每一頁上方標明 班別、學號、姓名 與 頁碼 (例如：P.1, P.2, ...)
 2. 作答完畢後，請拍照或掃描試卷，並使用學校電子信箱發 e-mail 到 ytleee@mail.ntou.edu.tw。請保留信件內容，已防止如果沒收到你們的 email 時，可由寄件備份再次轉發郵件以當證明。
 3. 請自己作答，禁止與他人討論。

1. 外伸樑如下圖所示。

(1) 試畫出其剪力圖與彎矩圖。(10%)

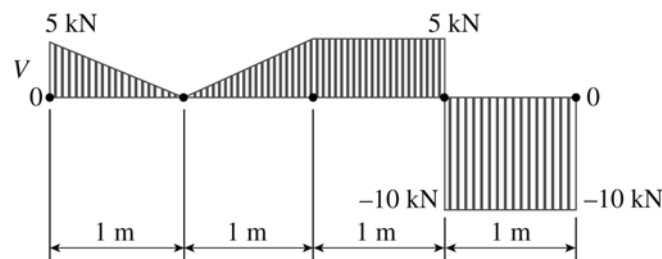
(2) 欲使離端點 A 5.5 m 處橫截面的剪力為零，則載重強度 q 大小應為多少？

(5%)



2. 簡支樑的剪力圖如下圖所示，請畫出此樑的載重分布情況與彎矩圖。(10%)

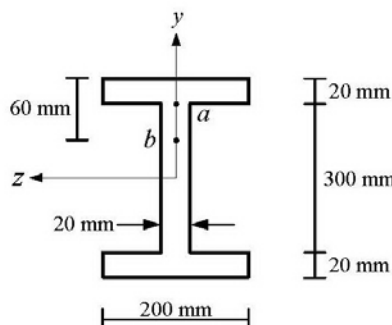
(假設無偶矩作用)



3. 如下圖所示，I 型斷面之直樑，材料之彈性模數 $E = 240 \text{ GPa}$ 。當 I 形斷面承

受 $M_z = 24 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 彎矩及 $V_y = 12.5 \text{ kN}$ 剪力作用，求此時樑中性軸曲率半徑 ρ 、 a 點正向應力 σ_x 及 b 點剪應力 τ_{xy} 。(15%)

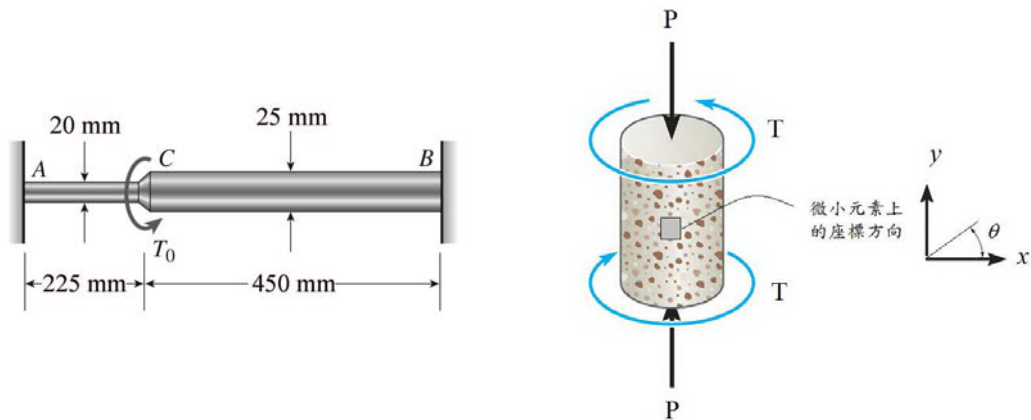
(108 地特三等)



4. 一分段軸 ACB 的實心圓型橫截面有兩組不同的直徑，軸的兩端固定以抗扭轉，如下左圖所示。

(1) 若軸的容許應力為 43 MPa，求可施加於 C 的最大扭矩 $(T_0)_{\max}$ 。(10%)

(2) 若最大扭轉角限制在 1.85° ，求 $(T_0)_{\max}$ 。(令 $G = 28 \text{ GPa}$) (10%)

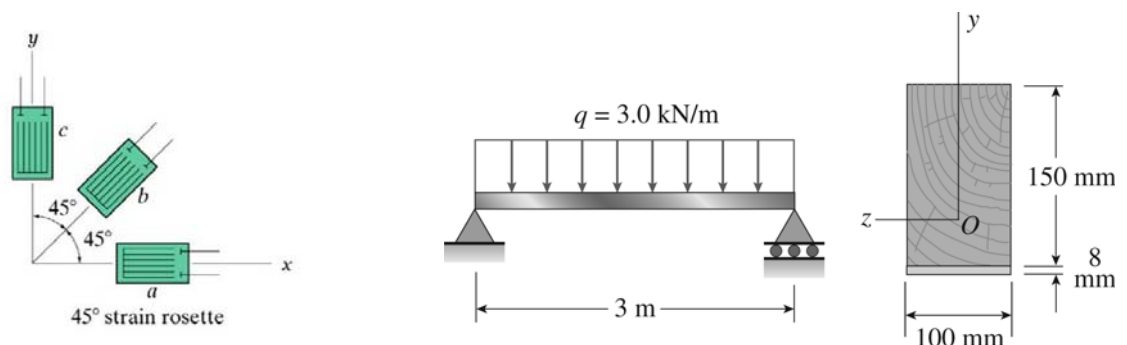


5. 如上右圖所示混凝土試體為脆性材料，此圓柱試體直徑為 5 cm、高 20 cm，試體於兩端同時受到軸壓力(P)與扭力(T)作用，針對試體 10 cm 高度處的表面位置(陰影示意區域)，回答下列問題：

(1) 假設 $P = 2 \text{ kN}$ ， $T = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$ ，試求此表面陰影位置的應力狀態。(8%)

(2) 試畫出其莫爾圓並求主應力、最大平面剪應力與其作用元素之方位。(12%)

6. 如下左圖為標測三方向應變之應變座 (45° strain rosette)，已知量測之三個應變讀數為 $\varepsilon_a = 218 \cdot 10^{-6}$ 、 $\varepsilon_b = 36 \cdot 10^{-6}$ 與 $\varepsilon_c = 62 \cdot 10^{-6}$ ，受測體材質為鋼製彈性模數 $E = 200 \text{ GPa}$ 、波松比 $\nu = 0.3$ 。試求該量測位置平面上的主軸應變(ε_1 與 ε_2)與主軸的方向角度 θ_p 。(10%) (107 土木技師)

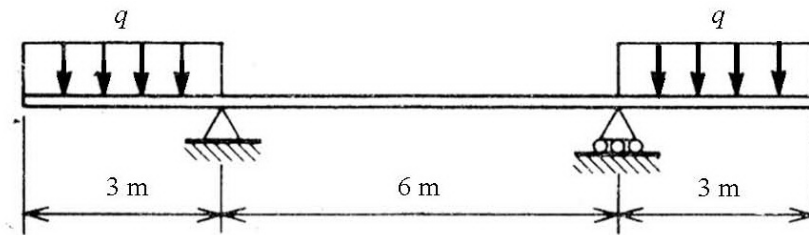


7. 一簡支合成樑長 3 m 承受強度 $q = 3 \text{ kN/m}$ 的均佈載重作用(見上右圖)，樑由 $100 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$ 的木材構成，並於樑底用一厚 8 mm、寬 100 mm 的鋼板強化。(木材與鋼的彈性模數為 $E_w = 10 \text{ GPa}$ 及 $E_s = 210 \text{ GPa}$)

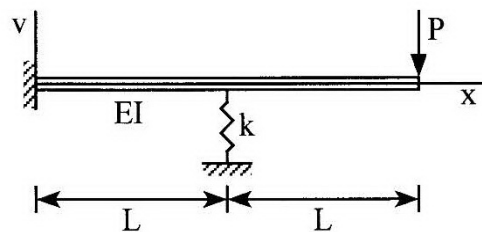
(1) 試求木材與鋼的最大彎曲應力 σ_w 及 σ_s 。(12%)

(2) 若木材與鋼的容許應力值 $(\sigma_w)_{\text{allow}} = 10 \text{ MPa}$ 及 $(\sigma_s)_{\text{allow}} = 100 \text{ MPa}$ ，試問 q 的最大值為何？(8%)

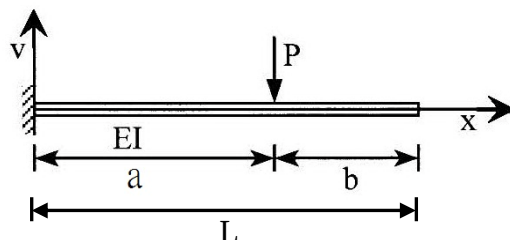
8. 一根具有兩端外伸部分之鋼樑如下圖，在兩端外伸部分，各負荷均勻載重 $q = 150 \text{ kN/m}$ 。鋼樑之截面為 $W30 \times 172$ ($I = 329,239 \text{ cm}^4$ ，高 $h = 76 \text{ cm}$)，其 $E = 206 \text{ GPa}$ 。試用面積力矩法求銷支承 A 上的轉角 θ 及梁中間之撓度 δ 。
(20%) (109 土木技師)



9. 有一懸臂樑斷面彎矩勁度為 EI ，此梁受到一彈簧支撐，彈簧係數 $k = EI/L^3$ ，求彈簧之反力 R 及梁受集中載重 P 處之位移，並請註明反力及位移之方向。
(20%) (108 結構技師)



提示：



$$v(x) = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x), \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v(x) = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a), \quad a \leq x \leq L$$

10. 對材力的遠距教學有何感想? (5%) 對遠距教學上課方式有何建議? (5%)
請分別作答。

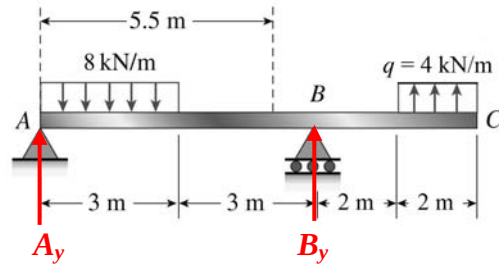
參考解答：

1. 外伸樑如下圖所示。

(1) 試畫出其剪力圖與彎矩圖。(10%)

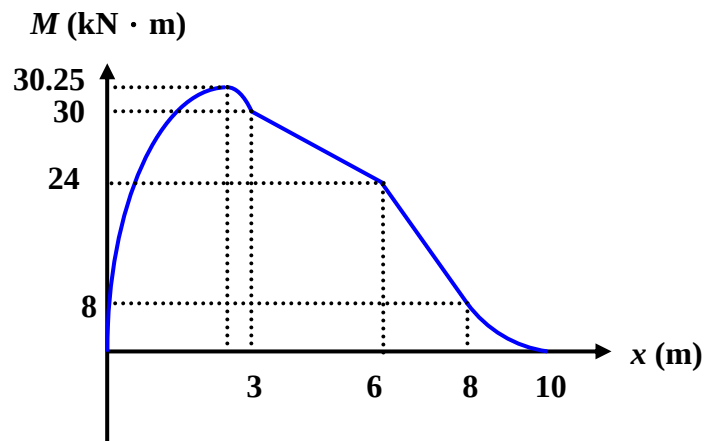
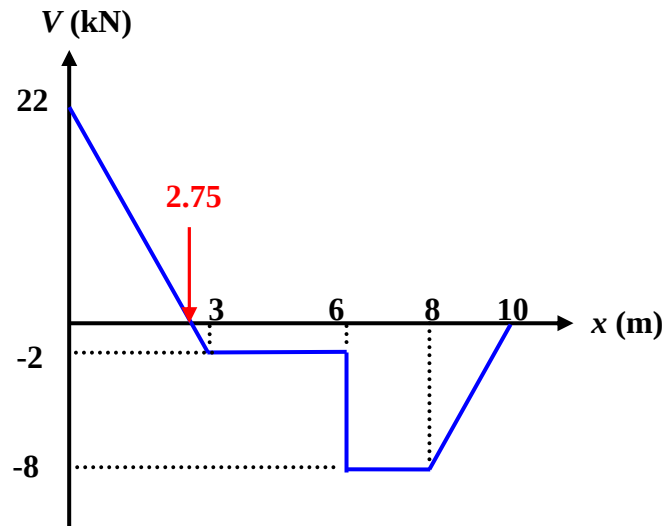
(2) 欲使離端點 A 5.5 m 處橫截面的剪力為零，則載重強度 q 大小應為多少？

(5%)



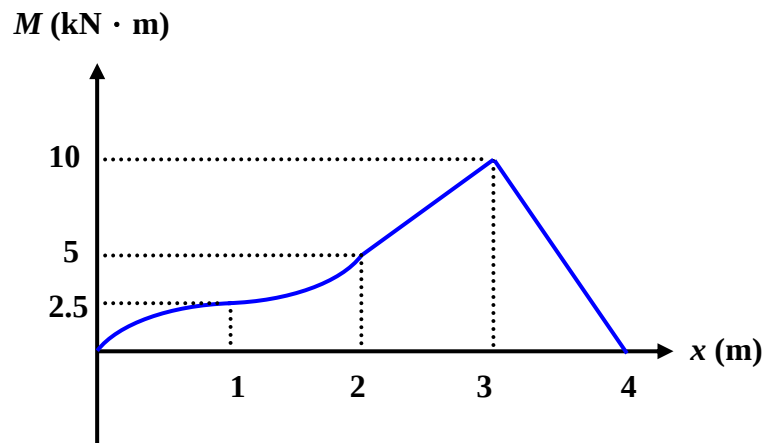
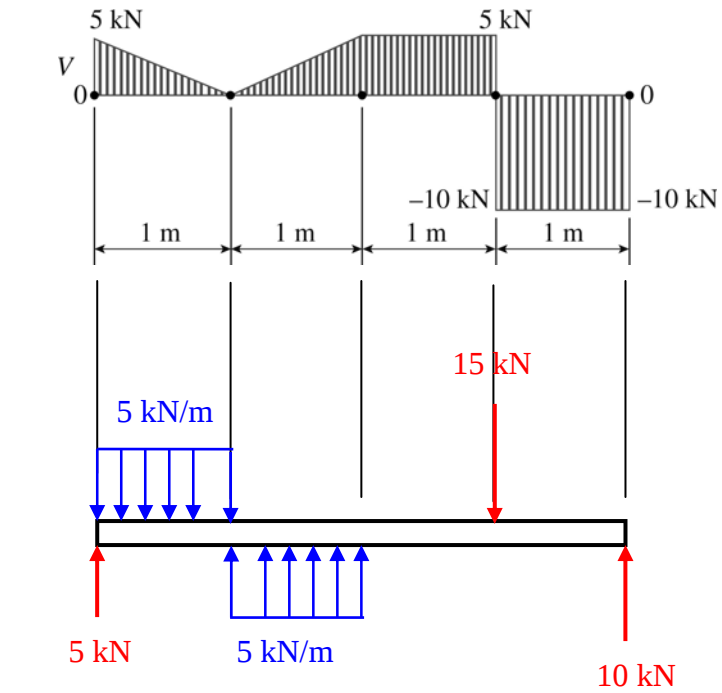
$$(1) \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow 8 \cdot 3 \cdot 1.5 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - B_y \cdot 6 = 0 \Rightarrow B_y = -6 \text{ (kN)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 8 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow A_y = 22 \text{ (kN)}$$

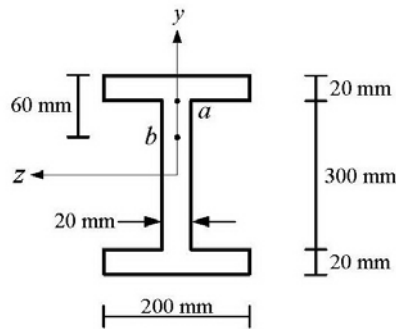


$$(2) \quad A_y = \frac{8 \cdot 3 \cdot 4.5 - q \cdot 2 \cdot 3}{6} = 8 \cdot 3 \Rightarrow q = 6 \text{ (kN/m)}$$

2. 簡支樑的剪力圖如下圖所示，請畫出此樑的載重分布情況與彎矩圖。(10%)
(假設無偶矩作用)



3. 如下圖所示，I 型斷面之直樑，材料之彈性模數 $E = 240 \text{ GPa}$ 。當 I 形斷面承受 $M_z = 24 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 彎矩及 $V_y = 12.5 \text{ kN}$ 剪力作用，求此時樑中性軸曲率半徑 ρ 、 a 點正向應力 σ_x 及 b 點剪應力 τ_{xy} 。(15%) (108 地特三等)



$$I = \frac{1}{12} \cdot 200 \cdot 340^3 - \frac{1}{12} (200 - 20) \cdot 300^3 = \frac{750.2}{3} \cdot 10^6 \text{ (mm}^4\text{)}$$

$$= \frac{750.2}{3} \cdot 10^{-6} \text{ (m}^4\text{)}$$

$$a \text{ 點正向應力 } \sigma_x = -\frac{M_z y}{I} = -\frac{24 \cdot 10^3 \cdot 150 \cdot 10^{-3}}{\frac{750.2}{3} \cdot 10^{-6}} = -14.40 \cdot 10^6 \text{ (Pa)}$$

$$= -14.40 \text{ (MPa)}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI} \Rightarrow \rho = \frac{EI}{M_z} = \frac{240 \cdot 10^9 \cdot \frac{750.2}{3} \cdot 10^{-6}}{24 \cdot 10^3} = 2500.67 \text{ (m)}$$

Q 為 b 點上方面積對中性軸的一次矩，即

$$Q = 200 \cdot 20 \cdot 160 + 40 \cdot 20 \cdot 130 = 0.744 \cdot 10^6 \text{ (mm}^3\text{)} = 0.744 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^3\text{)}$$

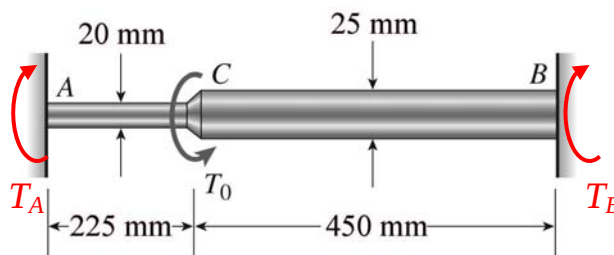
$$b \text{ 點剪應力 } \tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{12.5 \cdot 10^3 \cdot 0.744 \cdot 10^{-3}}{\frac{750.2}{3} \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 1.8595 \cdot 10^6 \text{ (Pa)}$$

$$= 1.8595 \text{ (MPa)}$$

4. 一分段軸 ACB 的實心圓型橫截面有兩組不同的直徑，軸的兩端固定以抗扭轉，如下左圖所示。

(1) 若軸的容許應力為 43 MPa，求可施加於 C 的最大扭矩 $(T_0)_{\max}$ 。(10%)

(2) 若最大扭轉角限制在 1.85° ，求 $(T_0)_{\max}$ 。(令 $G = 28 \text{ GPa}$) (10%)



$$(1) \text{ AC 段半徑 } R_A = 10 \text{ mm}, \text{ 慣性矩 } J_A = \frac{\pi \cdot R_A^4}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 10^4 (\text{mm}^4) = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-8} (\text{m}^4)$$

$$\begin{aligned} \text{BC 段半徑 } R_B = 12.5 \text{ mm}, \text{ 慣性矩 } J_B &= \frac{\pi \cdot R_B^4}{2} = \frac{390625\pi}{32} (\text{mm}^4) \\ &= \frac{390625\pi}{32} \cdot 10^{-12} (\text{m}^4) \end{aligned}$$

$$\text{由扭矩平衡可得: } T_A + T_B = T_0$$

$$\begin{aligned} \text{由相容方程 } \phi_{C/A} + \phi_{B/C} &= 0 \Rightarrow \phi_{C/A} = -\phi_{B/C} \Rightarrow \frac{T_A L_{AC}}{J_A G} = -\frac{(-T_B) L_{BC}}{J_B G} \\ &\Rightarrow T_A = \frac{512}{625} T_B \end{aligned}$$

$$\therefore T_A + T_B = T_0 \Rightarrow \frac{512}{625} T_B + T_B = T_0 \Rightarrow T_B = \frac{625}{1137} T_0 \Rightarrow T_A = \frac{512}{1137} T_0$$

AC 段最大剪應力發生在桿 AC 段表面，即

$$\tau_{AC} = \frac{T_A \cdot R_A}{J_A} = \frac{2T_A}{\pi} \cdot 10^6 = \frac{1024}{1137\pi} T_0 \cdot 10^6$$

BC 段最大剪應力發生在桿 BC 段表面，即

$$\tau_{BC} = \frac{T_B \cdot R_B}{J_B} = \frac{T_B \cdot 16}{15625\pi} \cdot 10^9 = \frac{640}{1137\pi} T_0 \cdot 10^6$$

$\therefore \tau_{AC} > \tau_{BC}$ 即當 τ_{AC} 等於容許應力時可得最大扭矩為

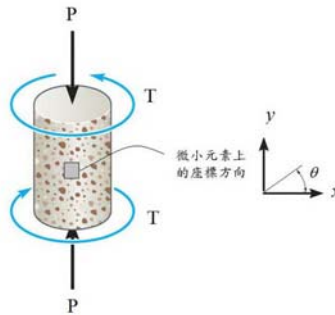
$$\frac{1024}{1137\pi} (T_0)_{\max} \cdot 10^6 = 43 \cdot 10^6 \Rightarrow (T_0)_{\max} = \frac{43 \cdot 1137\pi}{1024} = 150.0 (\text{N} \cdot \text{m})$$

$$(2) \text{ AC 段最大扭轉角為 } \phi_{C/A} = \frac{T_A L_{AC}}{J_A G} = \frac{48}{66325\pi} T_0$$

$$\text{BC 段最大扭轉角為 } \phi_{B/C} = \frac{T_B L_{BC}}{J_B G} = \frac{48}{66325\pi} T_0$$

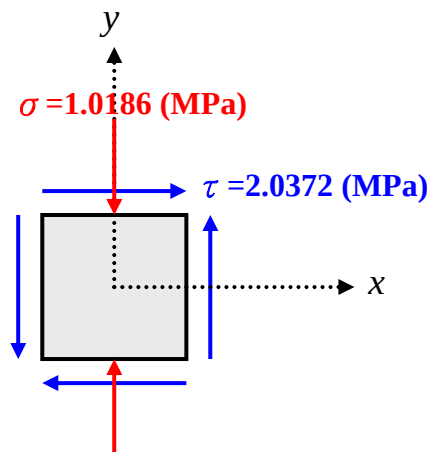
$$\therefore \frac{48}{66325\pi} (T_0)_{\max} = 1.85^\circ \Rightarrow (T_0)_{\max} = 140.16 (\text{N} \cdot \text{m})$$

5. 如上右圖所示混凝土試體為脆性材料，此圓柱試體直徑為5 cm、高20 cm，試體於兩端同時受到軸壓力(P)與扭力(T)作用，針對試體10 cm 高度處的表面位置(陰影示意區域)，回答下列問題：
- (1) 假設 $P = 2 \text{ kN}$ ， $T = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，試求此表面陰影位置的應力狀態。(8%)
- (2) 試畫出其莫爾圓並求主應力、最大平面剪應力與其作用元素之方位。(12%)



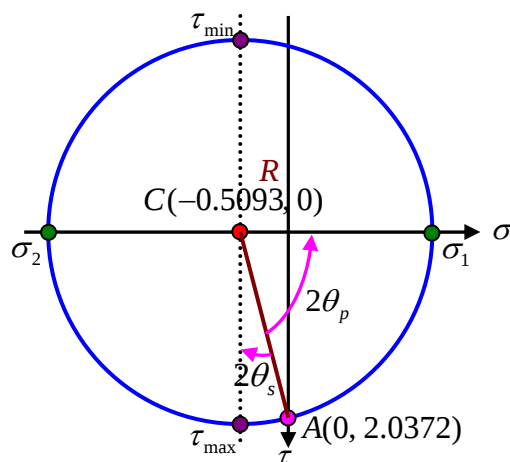
$$(1) \sigma = \frac{P}{A} = \frac{2 \cdot 10^3}{\pi \cdot \left(\frac{0.05}{2}\right)^2} = 1018.59 \cdot 10^3 \text{ (Pa)} = 1.0186 \text{ (MPa)} \text{ (壓應力)}$$

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{50 \cdot \frac{0.05}{2}}{\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{0.05}{2}\right)^4} = 2.0372 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 2.0372 \text{ (MPa)}$$



$$(2) \sigma_x = 0, \sigma_y = -1.0186 \text{ (MPa)} \Rightarrow \sigma_{avg} = -0.5093 \text{ (MPa)}$$

圓心 $C(-0.5093, 0)$ ，點 $A(0, 2.0372)$



$$R = \sqrt{[0 - (-0.5093)]^2 + 2.0372^2} = 2.0999$$

$$\sigma_1 = \sigma_{avg} + R = -0.5093 + 2.0999 = 1.5906 \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{avg} - R = -0.5093 - 2.0999 = -2.6092 \text{ (MPa)}$$

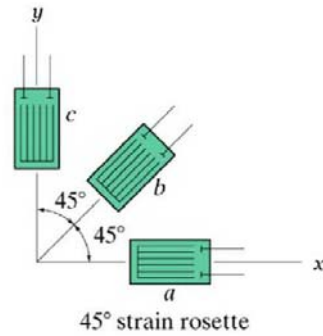
$$\tau_{\max} = R = 2.0999 \text{ (MPa)}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2.0372}{0.5093} \Rightarrow 2\theta_p = \tan^{-1}\left(\frac{2.0372}{0.5093}\right) = 1.3258 \text{ (rad)} = 75.96^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_p = 37.98^\circ \text{ (逆)}$$

$$2\theta_p + 2\theta_s = 90^\circ \Rightarrow 2\theta_s = 14.04^\circ \Rightarrow \theta_s = 7.02^\circ \text{ (順)}$$

6. 如下左圖為標測三方向應變之應變座 (45° strain rosette)，已知量測之三個應變讀數為 $\varepsilon_a = 218 \cdot 10^{-6}$ 、 $\varepsilon_b = 36 \cdot 10^{-6}$ 與 $\varepsilon_c = 62 \cdot 10^{-6}$ ，受測體材質為鋼製彈性模數 $E = 200 \text{ GPa}$ 、波松比 $\nu = 0.3$ 。試求該量測位置平面上的主軸應變 (ε_1 與 ε_2) 與主軸的方向角度 θ_p 。(10%) (107 土木技師)



應變轉換公式 $\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a = 218 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_c = 62 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2(45^\circ) + \varepsilon_y \sin^2(45^\circ) + \gamma_{xy} \sin(45^\circ) \cdot \cos(45^\circ)$$

$$\Rightarrow 36 \cdot 10^{-6} = 109 \cdot 10^{-6} + 31 \cdot 10^{-6} + \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = -208 \cdot 10^{-6}$$

$$\begin{aligned} \text{主應變為 } \varepsilon_{1,2} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ &= \left[\frac{218 + 62}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{218 - 62}{2}\right)^2 + \left(\frac{-208}{2}\right)^2} \right] \cdot 10^{-6} \\ &\Rightarrow \varepsilon_1 = 270 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_2 = 10 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{-208}{218 - 62} \Rightarrow 2\theta_p = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) = -0.927295 \text{ (rad)}$$

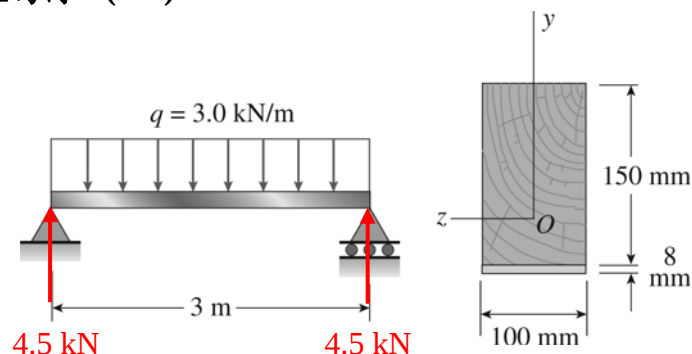
$$\Rightarrow \theta_p = -26.57^\circ \quad \text{or} \quad 63.43^\circ$$

(ε_1) (ε_2)

7. 一簡支合成樑長3 m承受強度 $q = 3 \text{ kN/m}$ 的均佈載重作用(見上右圖), 樑由 $100 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$ 的木材構成, 並於樑底用一厚8 mm、寬100 mm的鋼板強化。(木材與鋼的彈性模數為 $E_w = 10 \text{ GPa}$ 及 $E_s = 210 \text{ GPa}$)

(1) 試求木材與鋼的最大彎曲應力 σ_w 及 σ_s 。(12%)

(2) 若木材與鋼的容許應力值 $(\sigma_w)_{allow} = 10 \text{ MPa}$ 及 $(\sigma_s)_{allow} = 100 \text{ MPa}$, 試問 q 的最大值為何?(8%)



(1) $\therefore$ 對稱

$\therefore$ 彎矩最大在樑的中間

$$M = 4.5 \cdot 1.5 - 3 \cdot 1.5 \cdot \frac{1.5}{2} = 3.375 \text{ (kN} \cdot \text{m)} = 3375 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$\therefore$ 此為複合樑

$\therefore$ 使用截面轉換法, 將複合樑轉換成單一材料樑

在此將木材轉換成鋼

$$\text{轉換因子 } n = \frac{E_w}{E_s} = \frac{1}{21}$$

$$\text{轉換後鋼板的寬度為 } b' = \frac{100}{21} \text{ (mm)}$$

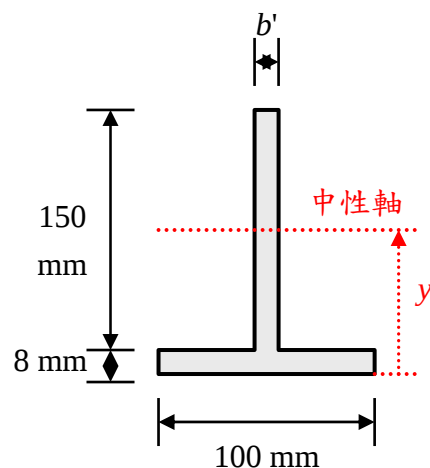
$$y' = \frac{(100 \cdot 8) \cdot 4 + \left(\frac{100}{21} \cdot 150\right) \cdot (75 + 8)}{100 \cdot 8 + \frac{100}{21} \cdot 150}$$

$$\Rightarrow y' = 41.26 \text{ (mm)}$$

對中性軸的慣性矩

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 8^3 + (100 \cdot 8) \cdot (41.26 - 4)^2 \\ &+ \frac{1}{12} \cdot \frac{100}{21} \cdot 150^3 + \left(\frac{100}{21} \cdot 150\right) \cdot (75 + 8 - 41.26)^2 \\ &= 3.6987 \cdot 10^6 \text{ (mm}^4\text{)} = 3.6987 \cdot 10^{-6} \text{ (m}^4\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{My}{I} \Rightarrow \sigma_s = -\frac{3375 \cdot (-41.26) \cdot 10^{-3}}{3.6987 \cdot 10^{-6}} = 37.65 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} \\ &= 37.65 \text{ (MPa)} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \sigma_w = -\frac{3375 \cdot (150 + 8 - 41.26) \cdot 10^{-3}}{3.6987 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1}{21} = -5.07 \cdot 10^6 \text{ (Pa)}$$

$$= -5.07 \text{ (MPa)}$$

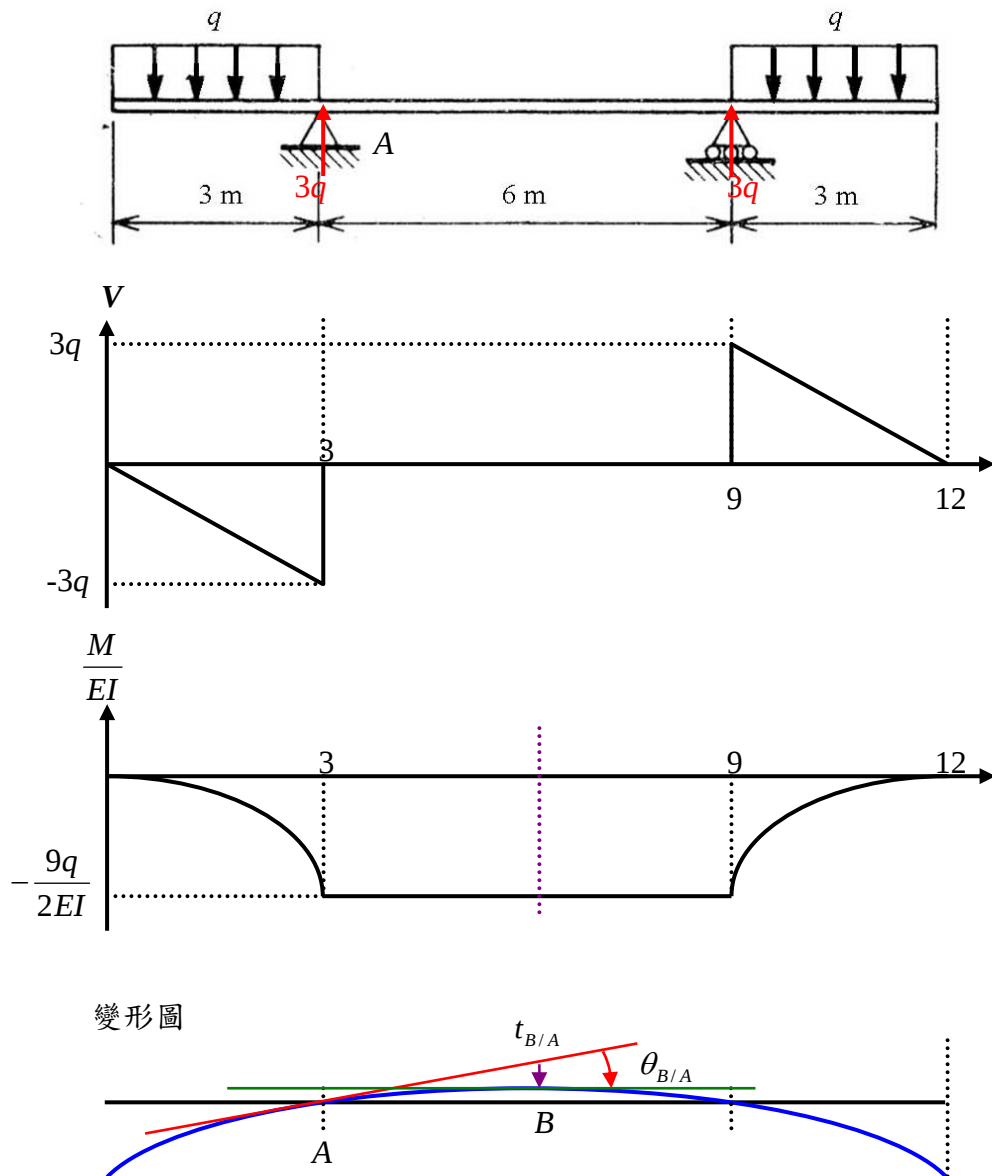
$$(2) (\sigma_s)_{allow} = \frac{M \cdot 41.26 \cdot 10^{-3}}{3.6987 \cdot 10^{-6}} = 100 \cdot 10^6 \Rightarrow M = 8964.37 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$(\sigma_w)_{allow} = \frac{M \cdot (150 + 8 - 41.26) \cdot 10^{-3}}{3.6987 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{1}{21} = 10 \cdot 10^6 \Rightarrow M = 6653.48 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$\therefore$ 取彎矩 M 最大為 $6653.48 \text{ (N} \cdot \text{m)} = 6.65348 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$

$$\text{故可得 } \frac{1}{2} \cdot 1.5q \cdot 1.5 = 6.65348 \Rightarrow q = 5.9142 \text{ (kN/m)}$$

8. 一根具有兩端外伸部分之鋼樑如下圖，在兩端外伸部分，各負荷均勻載重 $q = 150 \text{ kN/m}$ 。鋼樑之截面為 $W30 \times 172$ ($I = 329,239 \text{ cm}^4$ ，高 $h = 76 \text{ cm}$)，其 $E = 206 \text{ GPa}$ 。試用面積力矩法求銷支承 A 上的轉角 θ 及梁中間之撓度 δ 。
(20%) (109 土木技師)



$$\theta_{B/A} \text{ 為 } \frac{M}{EI} \text{ 圖下 A 到 B 的面積，即 } \theta_{B/A} = -\frac{27q}{2EI} = -\frac{2025 (\text{kN} \cdot \text{m})}{EI}$$

$$\therefore A \text{ 點轉角 } \theta_A = |\theta_{B/A}| = \frac{2025 (\text{kN} \cdot \text{m})}{EI} = \frac{2025 \cdot 10^3}{206 \cdot 10^9 \cdot 329,239 \cdot 10^{-8}} \\ = 2.9857 \cdot 10^{-3} \text{ (rad)} \\ = 0.1711^\circ$$

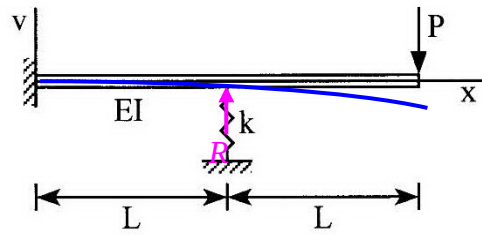
$$t_{B/A} \text{ 為 } \frac{M}{EI} \text{ 圖下 A 到 B 的面積對 B 鉛直線的一次矩即}$$

$$t_{B/A} = -\frac{9q}{2EI} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{81q (\text{kN} \cdot \text{m})}{4EI} = -\frac{3037.5 (\text{kN} \cdot \text{m})}{EI}$$

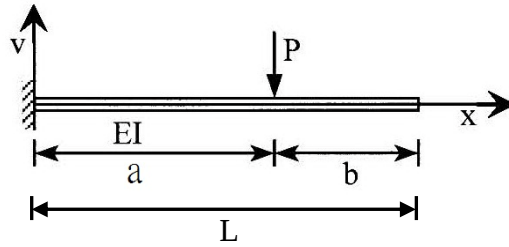
$$\delta_B = \theta_A \cdot L_{AB} - |t_{B/A}| = \frac{3037.5 \text{ (kN} \cdot \text{m)}}{EI} = \frac{3037.5 \cdot 10^3}{206 \cdot 10^9 \cdot 329,239 \cdot 10^{-8}} = 4.48 \cdot 10^{-3} \text{ (m)}$$

$$= 4.48 \text{ (mm)}$$

9. 有一懸臂樑斷面彎矩勁度為 EI ，此梁受到一彈簧支撐，彈簧係數 $k = EI/L^3$ ，求彈簧之反力 R 及梁受集中載重 P 處之位移，並請註明反力及位移之方向。
(20%) (108 結構技師)



提示：



$$v(x) = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x), \quad 0 \leq x \leq a$$

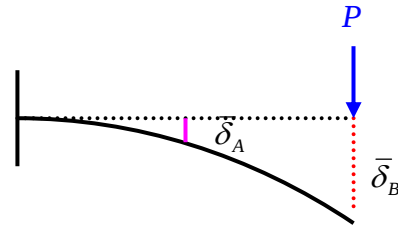
$$v(x) = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a), \quad a \leq x \leq L$$

將 $a = 2L$ 代入公式

$$v(x) = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x), \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\text{可得 } \bar{\delta}_B = v(2L) = -\frac{8PL^3}{3EI}$$

$$\bar{\delta}_A = v(L) = -\frac{5PL^3}{6EI}$$



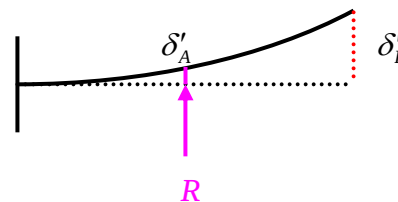
將 $a = L$, $b = L$ 代入公式

$$v(x) = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x), \quad 0 \leq x \leq a$$

$$v(x) = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a), \quad a \leq x \leq L$$

$$\text{可得 } \delta'_B = v(2L) = \frac{5RL^3}{6EI}$$

$$\delta'_A = v(L) = \frac{RL^3}{3EI}$$



又在彈簧處因受壓力 R 作用，故壓縮量 $\delta_A = -\frac{R}{k}$

$$\therefore \delta_A = \bar{\delta}_A + \delta'_A \Rightarrow -\frac{R}{k} = -\frac{5PL^3}{6EI} + \frac{RL^3}{3EI} \Rightarrow R = \frac{5}{8}P \quad (\uparrow)$$

$$P \text{ 處之位移 } \delta_B = -\frac{8PL^3}{3EI} + \frac{5RL^3}{6EI} = -\frac{103PL^3}{48EI} \quad (\text{負表示往下移動})$$