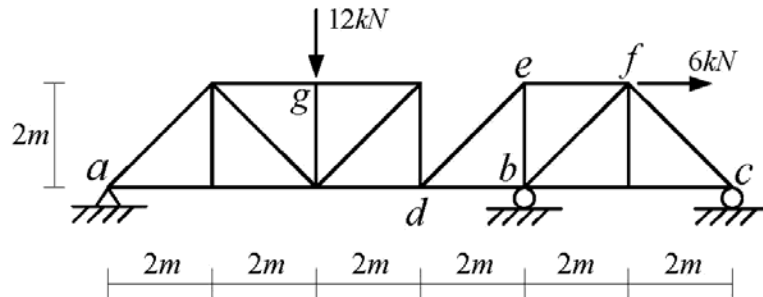


1. 如圖一所示之平面桁架結構， $a$ 點為鉸支承， $b$ 點及 $c$ 點為滾支承， $f$ 點承受水平集中載重  $6\text{ kN}$ ， $g$ 點承受集中垂直載重  $12\text{ kN}$ 。求各支承反力及桿件 $bd$ 、桿件 $ef$ 的內力。(20%) (109普考)



圖一

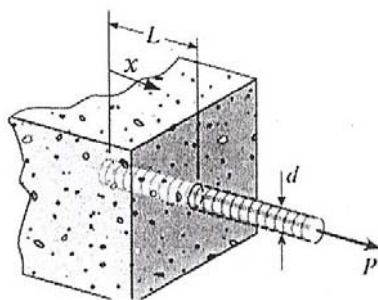
2. 直徑  $d = 12\text{ mm}$  之圓桿插入混凝土中，插入長度為  $L = 500\text{ mm}$ ，此圓桿受到拉力  $P = 20\text{ kN}$  作用，如下圖所示。
- (1) 若圓桿與混凝土間之剪應力(握裹應力)為均勻分布，求圓桿與混凝土間之平均剪應力  $\tau_{ave}$ 。(6%)
- (2) 若圓桿與混凝土間之剪應力分布為：(10%)

$$\tau = \frac{\tau_{\max}}{4L^3} (4L^3 - 9Lx^2 + 6x^3)$$

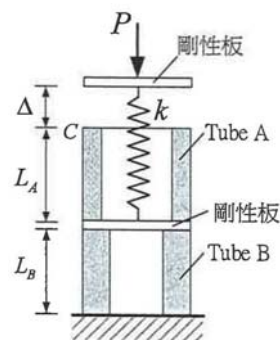
求圓桿與混凝土間之平均剪應力  $\tau_{ave}$  (以  $\tau_{\max}$  表之)。

- (3) 若欲使(1)及(2)所算的平均剪應力相同，則  $\tau_{\max} = ?$  (4%)

(103台科大營建丁組)



圖二

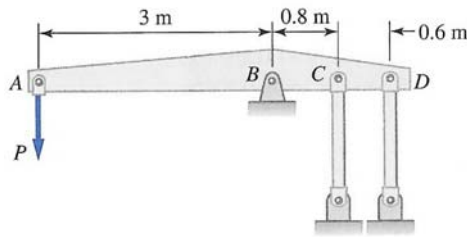


圖三

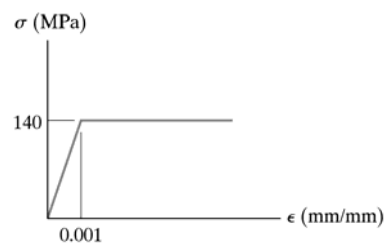
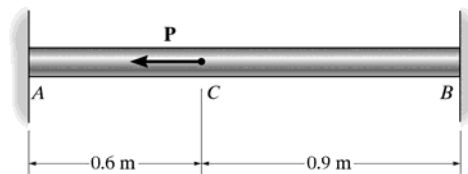
3. 如圖三所示，空心圓管A (Tube A) 長  $L_A = 0.35\text{ m}$ ，截面積  $A_A = 1517\text{ mm}^2$ ，空心圓管B (Tube B) 長  $L_B = 0.4\text{ m}$ ，截面積  $A_B = 1984\text{ mm}^2$ ，兩管的楊氏模數  $E_A = E_B = E = 70\text{ GPa}$ 。直線彈簧(彈力常數  $k = 200\text{ MN/m}$ )接於空心圓管A的底部的剛性板，未施加外力 $P$ 時，彈簧的長度比空心圓管A的長度多  $0.6\text{ mm}$  (即  $\Delta = 0.6\text{ mm}$ )。求：外力  $P = 150\text{ kN}$  作用時，空心圓管A的內力  $N_A$ 、彈簧的彈力  $N_s$ ，及在空心圓管A的頂部(即圖中的C點)的位移  $\delta_C$ 。(20%)

(108台科大營建丙組)

4. 剛性桿件  $ABCD$  銷接於  $B$  點及在  $C$  點與  $D$  點受兩截面積為  $250 \text{ mm}^2$  的相同鋼桿所拘束。如果溫度增加  $80^\circ\text{C}$ ，但在  $C$  點的鋼桿無應力，試求力  $P = ?$  (20%)  
(已知  $\alpha = 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  和  $E = 200 \text{ GPa}$ )

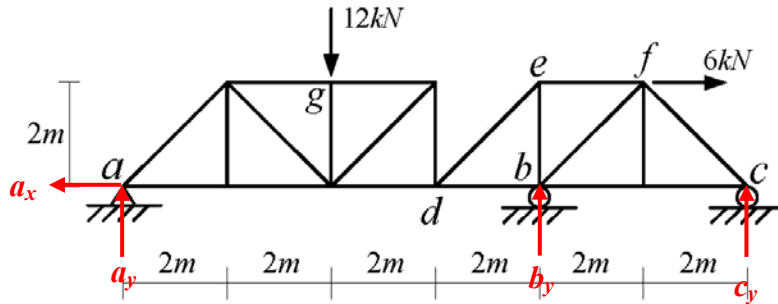


5. 直徑  $50 \text{ mm}$  的棒件兩端固定連接在支承點並且承受一軸向負載  $P$ 。若棒材的應力-應變行為如下圖所示之完全彈-塑性行為，試求使  $CB$  段產生降伏所需的 minimum 負載  $P$ 。若此負載釋放後，試求桿件內殘留應力 (14%) 與  $C$  點的永久位移。(6%)



參考解答：

1. 如圖一所示之平面桁架結構， $a$ 點為鉸支承， $b$ 點及 $c$ 點為滾支承， $f$ 點承受水平集中載重  $6\text{ kN}$ ， $g$ 點承受集中垂直載重  $12\text{ kN}$ 。求各支承反力及桿件 $bd$ 、桿件 $ef$ 的內力。(20%) (109普考)

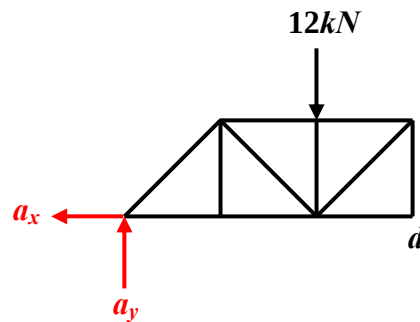


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow a_x - 6 = 0 \Rightarrow a_x = 6\text{ (kN)}$$

取自由體圖如左

$$\sum M_d = 0 \Rightarrow a_y \cdot 6 - 12 \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow a_y = 4\text{ (kN)}$$



取整體

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow 4 \cdot 12 - 12 \cdot 8 + b_y \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow b_y = 9\text{ (kN)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow a_y + b_y + c_y - 12 = 0 \Rightarrow c_y = -1\text{ (kN)}$$

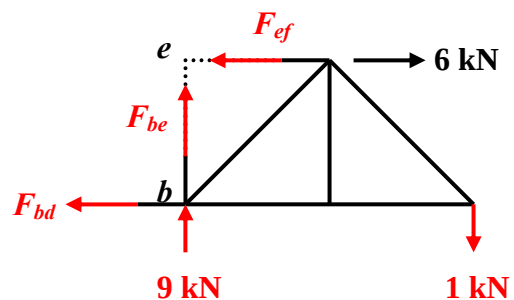
由剖面法如左圖

$$\sum M_e = 0 \Rightarrow F_{bd} \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow F_{bd} = -2\text{ (kN)}$$

$$\sum M_b = 0 \Rightarrow F_{ef} \cdot 2 - 6 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow F_{ef} = 8\text{ (kN)}$$



上述結果正為拉力，負為壓力

2. 直徑  $d = 12 \text{ mm}$  之圓桿插入混凝土中，插入長度為  $L = 500 \text{ mm}$ ，此圓桿受到拉力  $P = 20 \text{ kN}$  作用，如下圖所示。

(1) 若圓桿與混凝土間之剪應力(握裹應力)為均勻分布，求圓桿與混凝土間之平均剪應力  $\tau_{ave}$ 。(6%)

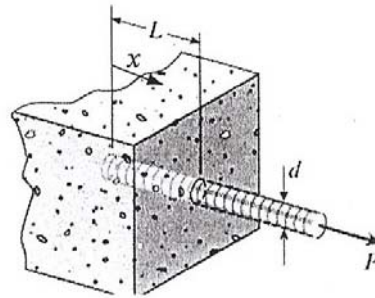
(2) 若圓桿與混凝土間之剪應力分布為：(10%)

$$\tau = \frac{\tau_{\max}}{4L^3} (4L^3 - 9Lx^2 + 6x^3)$$

求圓桿與混凝土間之平均剪應力  $\tau_{ave}$  (以  $\tau_{\max}$  表之)。

(3) 若欲使(1)及(2)所算的平均剪應力相同，則  $\tau_{\max} = ?$  (4%)

(103台科大營建丁組)



$$(1) \tau_{ave} = \frac{P}{\pi \cdot d \cdot L} = \frac{20 \cdot 10^3}{(\pi \cdot 12 \cdot 500) \cdot 10^{-6}} = 1.0610 \cdot 10^6 \text{ (Pa)} = 1.0610 \text{ (MPa)}$$

$$(2) dA = \pi \cdot d \cdot dx$$

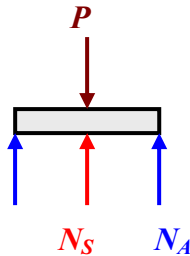
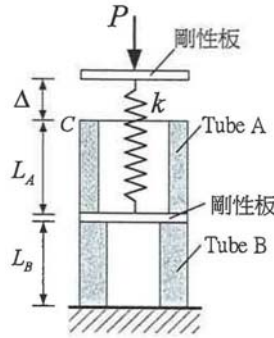
$$P = \pi d \int_0^L \frac{\tau_{\max}}{4L^3} (4L^3 - 9Lx^2 + 6x^3) dx = \frac{5}{8} \pi d L \tau_{\max}$$

$$\text{又 } P = \pi d L \tau_{ave} = \frac{5}{8} \pi d L \tau_{\max} \Rightarrow \tau_{ave} = \frac{5}{8} \tau_{\max}$$

$$(3) \tau_{\max} = \frac{8}{5} \tau_{ave} = \frac{8}{5} \cdot 1.0610 = 1.6977 \text{ (MPa)}$$

3. 如圖三所示，空心圓管A (Tube A) 長  $L_A = 0.35 \text{ m}$ ，截面積  $A_A = 1517 \text{ mm}^2$ ，空心圓管B (Tube B) 長  $L_B = 0.4 \text{ m}$ ，截面積  $A_B = 1984 \text{ mm}^2$ ，兩管的楊氏模數  $E_A = E_B = E = 70 \text{ GPa}$ 。直線彈簧(彈力常數  $k = 200 \text{ MN/m}$ )接於空心圓管A的底部的剛性板，未施加外力  $P$  時，彈簧的長度比空心圓管A的長度多  $0.6 \text{ mm}$  (即  $\Delta = 0.6 \text{ mm}$ )。求：外力  $P = 150 \text{ kN}$  作用時，空心圓管A的內力  $N_A$ 、彈簧的彈力  $N_S$ ，及在空心圓管A的頂部(即圖中的C點)的位移  $\delta_C$ 。(20%)

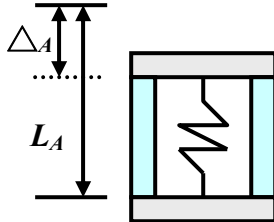
(108台科大營建丙組)



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_A + N_S = P$$

$$\Rightarrow N_A + N_S = 150 \cdot 10^3 \quad \dots (1)$$

此為靜不定問題，故需由幾何變形尋找相容方程  
由圖可知相容方程為



$$\begin{aligned} \Delta_S &= \Delta_A + \Delta \\ \Rightarrow \frac{N_S}{k} &= \frac{N_A \cdot L_A}{A_A E_A} + \Delta \\ \Rightarrow \frac{N_S}{200 \cdot 10^6} &= \frac{N_A \cdot 0.35}{1517 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \cdot 10^9} + 0.6 \cdot 10^{-3} \\ \Rightarrow N_S - \frac{1000}{1517} N_A &= 120 \cdot 10^3 \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$$\text{由(1)-(2)可得 } \frac{2517}{1517} N_A = 30 \cdot 10^3$$

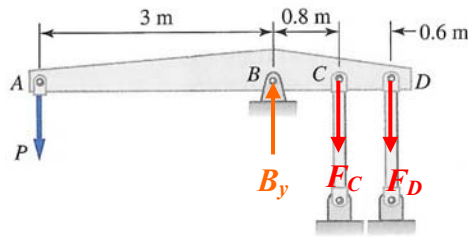
$$\Rightarrow N_A = 18.0810 \cdot 10^3 \text{ (N)} = 18.0810 \text{ (kN)}$$

$$\Rightarrow N_S = 131.9190 \text{ (kN)}$$

C點位移  $\delta_C$  可由 Tube A 的壓縮量  $\Delta_A$  與 Tube B 的壓縮量  $\Delta_B$  相加求得，即

$$\begin{aligned} \delta_C &= \Delta_A + \Delta_B \\ &= \frac{N_A \cdot L_A}{A_A E_A} + \frac{P \cdot L_B}{A_B E_B} \\ &= \frac{18.0810 \cdot 10^3 \cdot 0.35}{1517 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \cdot 10^9} + \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 0.4}{1984 \cdot 10^{-6} \cdot 70 \cdot 10^9} \\ &= 0.0004916 \text{ (m)} = 0.4916 \text{ (mm)} \end{aligned}$$

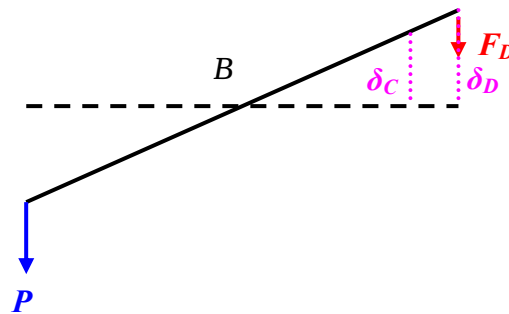
4. 剛性桿件  $ABCD$  銷接於  $B$  點及在  $C$  點與  $D$  點受兩截面積為  $250 \text{ mm}^2$  的相同鋼桿所拘束。如果溫度增加  $80^\circ\text{C}$ ，但在  $C$  點的鋼桿無應力，試求力  $P = ?$  (20%)  
(已知  $\alpha = 12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  和  $E = 200 \text{ GPa}$ )



在  $C$  點的鋼桿無應力 ( $F_C = 0$ ) 由  $B$  點彎矩平衡可得  $P = \frac{7}{15} F_D$

但因溫度增加  $80^\circ\text{C}$  對應  $C$  點鋼桿伸長量為  $\delta_C = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$

可知鋼桿之自由體圖如下



由幾何變形可知:  $\frac{\delta_C}{0.8} = \frac{\delta_D}{1.4} \Rightarrow \delta_D = \frac{7}{4} \delta_C$

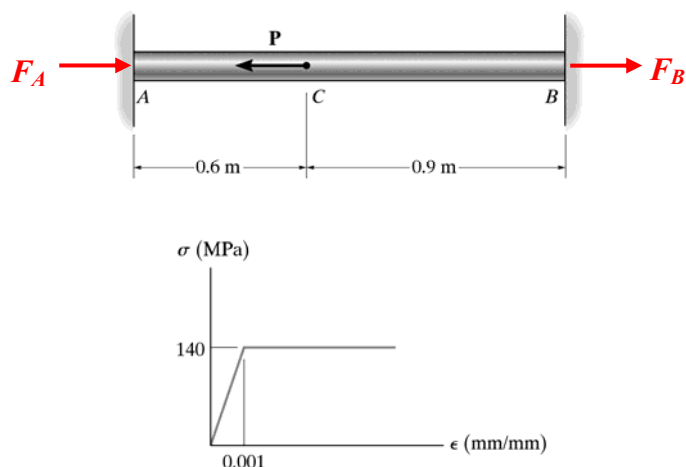
又位移量  $\delta_D$  是桿因溫度增加所得之伸長量 ( $\delta_T = \delta_C$ ) 與  $F_D$  所得之伸長量組成

$$\therefore \frac{F_D \cdot L}{A \cdot E} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L = \frac{7}{4} \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_D &= \frac{3}{4} \alpha \cdot \Delta T \cdot A \cdot E = \frac{3}{4} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 250 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^9 \\ &= 36000 \text{ (N)} = 36 \text{ (kN)} \end{aligned}$$

$$\text{又 } P = \frac{7}{15} F_D = 16.8 \text{ (kN)}$$

5. 直徑 50 mm 的棒件兩端固定連接在支承點並且承受一軸向負載  $P$ 。若棒材的應力-應變行為如下圖所示之完全彈-塑性行為，試求使  $CB$  段產生降伏所需的 minimum 負載  $P$ 。若此負載釋放後，試求桿件內殘留應力 (14%) 與  $C$  點的永久位移。(6%)



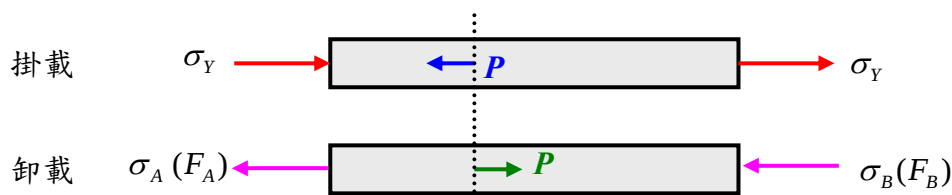
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_B = P \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} \text{相容方程式為 } \delta_{AB} = 0 &\Rightarrow -\frac{F_A \cdot L_{AC}}{AE} + \frac{F_B \cdot L_{BC}}{AE} = 0 \\ &\Rightarrow F_A = \frac{L_{BC}}{L_{AC}} F_B = \frac{3}{2} F_B \quad \dots(2) \end{aligned}$$

$$\text{由(1)與(2)可得 } F_B = 0.4P \Rightarrow F_A = 0.6P$$

又由題目可知  $CB$  段產生降伏所需的 minimum 負載，即為  $CB$  段為彈性的最大應力  
又因  $F_B < F_A$  故可知  $AC$  段已降伏並進入塑性區

$$\begin{aligned} \text{因此最小負載 } P = F_A + F_B = \sigma_Y \cdot A + \sigma_Y \cdot A &= 2 \cdot 140 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot \left(\frac{50}{2}\right)^2 \cdot 10^{-6} \\ &= 175\pi \cdot 10^3 \text{ (N)} = 549.78 \text{ (kN)} \end{aligned}$$



$$\text{殘留應力 } (\sigma_A)_r = \sigma_A - \sigma_Y = \frac{0.6 \cdot 549.78 \cdot 10^3}{\pi \left(\frac{50}{2}\right)^2} - 140 = 28 \text{ (MPa)} \text{ (拉應力)}$$

$$(\sigma_B)_r = \sigma_Y - \sigma_B = 140 - \frac{0.4 \cdot 549.78 \cdot 10^3}{\pi \left(\frac{50}{2}\right)^2} = 28 \text{ (MPa)} \text{ (拉應力)}$$

$$\text{永久位移 } \delta_C = \frac{(F_B)_r L}{AE} = \frac{(\sigma_B)_r L}{E} = \frac{28 \cdot 10^6 \cdot 0.9}{\frac{140}{0.001} \cdot 10^6} = 0.18 \cdot 10^{-3} \text{ (m)} = 0.18 \text{ (mm)} (\leftarrow)$$