國立臺灣海洋大學河海工程學系 2026 工程數學(一) 第一次大考參考解答

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 根據牛頓冷卻定律，物體在流動空氣中的冷卻率與物體溫度和空氣溫度之差成正比。如果空氣溫度在所論時間內為 20°C，又知經過 20 分鐘物體由 100°C 降至 60°C，試求物體溫度變化規律及物體溫度降至 30°C 的時間。 (10%)

2. 試以分離變數法或結合變數變換法求解下述微分方程式

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{\sec^2 y}{1+x^2}$ (8%)

(2) $(x^2y+2xy^2-y^3)dx-(2y^3-xy^2+x^3)dy=0$ (8%)

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y-2}{x+y-5}$ (8%)

3. 已知微分方程式為 $\frac{y'}{\cos x}+y(\frac{\tan x}{\cos x})=\cos x$

(1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(7%)
(若為線性，直接求解；若非線性，則轉換成線性，再求解)

(2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(7%)
(若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

4. 已知微分方程式為 $(y')^2-xy'-y'+y=0$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 此為線性或非線性? (2%)

(3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=?$ (8%)

5. 已知微分方程式為 $xy'-(2x+1)y+y^2=x^2$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 此為線性或非線性? (2%)

(3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=?$ (8%)

6. 試解下列各微分方程

(1) $(y^2e^{xy^2}+4x^3)dx+(2xye^{xy^2}-3y^2)dy=0$ (8%)

(2) $(3x+\frac{6}{y})dx+(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x})dy=0$ (8%)

(3) $xy(y')^2+(x^2+y^2)y'+xy=0$ (8%)

<參考解答>

1. 根據牛頓冷卻定律，物體在流動空氣中的冷卻率與物體溫度和空氣溫度之差成正比。如果空氣溫度在所論時間內為 20°C，又知經過 20 分鐘物體由 100°C 降至 60°C，試求物體溫度變化規律及物體溫度降至 30°C 的時間。 (10%)

設在 t 時刻物體溫度為 $T(t)$，由題目可知

$$\frac{dT}{dt} = k(T-20) \quad \Rightarrow T(t) = Ce^{kt} + 20$$

又 $T(0) = 100 \quad \Rightarrow 100 = C + 20 \quad \Rightarrow C = 80$

$$T(20) = 60 \quad \Rightarrow 60 = 80 \cdot e^{20k} + 20 \quad \Rightarrow k = -\frac{\ln 2}{20}$$

$$\therefore \quad T(t) = 80 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{20}t} + 20$$

最後令 $T = 30$ 求所需時間 t

$$30 = 80 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{20}t} + 20 \quad \Rightarrow -\frac{\ln 2}{20}t = -\ln 8 \quad \Rightarrow t = 60$$

表示經過時間 60 分鐘，即 1 小時後，物體溫度可降至 30°C

2. 試以分離變數法或結合變數變換法求解下述微分方程式

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 y}{1+x^2}$ **(8%)**

(2) $(x^2y + 2xy^2 - y^3)dx - (2y^3 - xy^2 + x^3)dy = 0$ **(8%)**

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-2}{x+y-5}$ **(8%)**

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 y}{1+x^2} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sec^2 y}dy = \frac{1}{1+x^2}dx$

$$\Rightarrow \int \cos^2 y\, dy = \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1+\cos 2y}{2}dy = \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\sin 2y = \tan^{-1} x + C$$

(2) $(x^2y + 2xy^2 - y^3)dx - (2y^3 - xy^2 + x^3)dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2y + 2xy^2 - y^3}{2y^3 - xy^2 + x^3}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + 2(\frac{y}{x})^2 - (\frac{y}{x})^3}{2(\frac{y}{x})^3 - (\frac{y}{x})^2 + 1}$$

令 $u=\frac{y}{x} \quad \Rightarrow y=ux \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

代回 ODE 可得 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u+2u^2-u^3}{2u^3-u^2+1}$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{u+2u^2-u^3}{2u^3-u^2+1}-u=\frac{2u^2-2u^4}{2u^3-u^2+1}$$

$$\Rightarrow \int\frac{2u^3-u^2+1}{2u^2-2u^4}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{-2u^3+u^2-1}{u^4-u^2}du=2\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1})du=2\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u}-\ln|u-1|-\ln|u+1|=2\ln|x|+C_1$$

$$\Rightarrow \ln x^2(u^2-1)=C_1-\frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow \ln(y^2-x^2)=C_1-\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow (y^2-x^2)e^{\frac{x}{y}}=C$$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y-2}{x+y-5}$

令 $x=u+a \quad \Rightarrow dx=du$

$y=v+b \quad \Rightarrow dy=dv$

代回 ODE 可得 $\frac{dv}{du}=\frac{v+b-2}{u+a+v+b-5}$

可得 $\begin{cases} b-2=0 \\ a+b-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$

$\therefore \quad \frac{dv}{du}=\frac{v}{u+v} \quad \Rightarrow \frac{dv}{du}=\frac{\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}$

令 $t=\frac{v}{u} \quad \Rightarrow v=ut \quad \Rightarrow \frac{dv}{du}=t+u\frac{dt}{du}$ 代回 ODE 可得

$t+u\frac{dt}{du}=\frac{t}{1+t} \quad \Rightarrow u\frac{dt}{du}=\frac{t}{1+t}-t=-\frac{t^2}{1+t}$

$$\Rightarrow -\frac{1+t}{t^2}dt=\frac{1}{u}du$$

$$\Rightarrow -\int \frac{1+t}{t^2}dt = \int \frac{1}{u}du$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} - \ln t = \ln u + C_1$$

$$\Rightarrow \ln|ut| = \frac{1}{t} - C_1$$

$$\Rightarrow \ln|v| = \frac{u}{v} - C_1$$

$$\Rightarrow v = Ce^{\frac{u}{v}}$$

$$\Rightarrow y = Ce^{\frac{x-3}{y-2}} + 2$$

3. 已知微分方程式為 $\frac{y'}{\cos x} + (\frac{\tan x}{\cos x})y = \cos x$

(1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(7%)
(若為線性，直接求解；若非線性，則轉換成線性，再求解)

(2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(7%)
(若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

(1) $\frac{y'}{\cos x} + (\frac{\tan x}{\cos x})y = \cos x \Rightarrow y' + (\tan x)y = \cos^2 x$

此為一階非線性微分方程式

積分因子 $\mu = e^{\int \tan x\,dx} = e^{-\int \frac{1}{\cos x}d(\cos x)} = e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{\cos x}$

同乘積分因子後可得

$$\frac{y'}{\cos x} + y(\frac{\tan x}{\cos x}) = \cos x \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{1}{\cos x}y) = \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x}y = \sin x + C$$

$$\Rightarrow y = \sin x \cos x + C\cos x$$

(2) $\frac{y'}{\cos x} + (\frac{\tan x}{\cos x})y = \cos x \quad \Rightarrow (\frac{\sin x}{\cos^2 x}y - \cos x)dx + \frac{1}{\cos x}dy = 0$

令 $M = \frac{\sin x}{\cos^2 x}y - \cos x \quad \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$N = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

由判斷式 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 可知此為正合 ODE

$\therefore$ 可知 $M=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}y-\cos x \quad \Rightarrow \phi=\dfrac{1}{\cos x}y-\sin+ f(y)$

$\overline{N}=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=\dfrac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \phi=\dfrac{1}{\cos x}y+g(x)$

比較後可得 $\phi(x,y)=\dfrac{1}{\cos x}y-\sin x=C \quad \Rightarrow y=\sin x\cos x+C\cos x$

4. 已知微分方程式為 $(y')^2-xy'-y'+y=0$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 此為線性或非線性? (2%)

(3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=?$ **(8%)**

(1) $(y')^2-xy'-y'+y=0 \quad \Rightarrow y=xy'+y'+(y')^2$

屬於 $y=xy'+f(y')$ 之型式，故為 Clairaut ODE

(2) 此為非線性 ODE

(3) $y=xy'+y'+(y')^2$

令 $p=y' \quad \Rightarrow y=xp+p+p^2$

將兩邊對 x 微分可得 $y'=p+xp'+p'-2p\cdot p'$

$\Rightarrow p=p+xp'+p'-2p\cdot p'$

$\Rightarrow (x+1-2p)p'=0$

由 $p'=0 \quad \Rightarrow y'=p=C$ 代回 $y=xp+p+p^2$

可得 $y=Cx+C+C^2$（通解）

由 $x+1-2p=0 \quad \Rightarrow p=\dfrac{x+1}{2}$ 代回 ODE 可得

$y=x\cdot\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x+1}{2}+(\dfrac{x+1}{2})^2=\dfrac{(x+1)^2}{4}$（奇解）

5. 已知微分方程式為 $xy'-(2x+1)y+y^2=-x^2$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 此為線性或非線性? (2%)

(3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=?$ **(8%)**

(1) $y'=-\dfrac{1}{x}y^2+\dfrac{2x+1}{x}y-x$

此為 Riccati ODE

(2) 此為非線性 ODE

(3) 由觀察可得一解 $S=x$

令 $y=S+\dfrac{1}{V}=x+\dfrac{1}{V} \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{V'}{V^2}$ 代回 ODE 可得

$$1-\frac{V'}{V^2}=-\frac{1}{x}(x+\frac{1}{V})^2+\frac{2x+1}{x}(x+\frac{1}{V})-x$$

$$\Rightarrow 1-\frac{V'}{V^2}=-\frac{1}{x}(x^2+2\frac{x}{V}+\frac{1}{V^2})+2x+1+\frac{2x+1}{xV}-x$$

$$\Rightarrow V'+\frac{1}{x}V=\frac{1}{x} \quad \longrightarrow \text{ 此為一階線性 ODE}$$

積分因子 $\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$

同乘積分因子後可得 $xV'+V=1 \Rightarrow \frac{d}{dx}(xV)=1 \Rightarrow xV=x+C$

$$\Rightarrow V=\frac{x+C}{x}$$

$$\therefore \quad y=S+\frac{1}{V}=x+\frac{x}{x+C}$$

6. 試解下列各微分方程

(1) $(y^2e^{xy^2}+4x^3)dx+(2xye^{xy^2}-3y^2)dy=0$ **(8%)**

(2) $(3x+\frac{6}{y})dx+(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x})dy=0$ **(8%)**

(3) $xy(y')^2+(x^2+y^2)y'+xy=0$ **(8%)**

(1) $(y^2e^{xy^2}+4x^3)dx+(2xye^{xy^2}-3y^2)dy=0$

$$\Rightarrow ye^{xy^2}(ydx+2xdy)+4x^3dx-3y^2dy=0$$

$$\Rightarrow ye^{xy^2}\cdot\frac{1}{y}d(xy^2)+d(x^4)-d(y^3)=0$$

$$\Rightarrow \int e^{xy^2}d(xy^2)+\int d(x^4)-\int d(y^3)=C$$

$$\Rightarrow e^{xy^2}+x^4-y^3=C$$

(2) $(3x+\frac{6}{y})dx+(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x})dy=0 \Rightarrow (3x^2y+6x)dx+(x^3+3y^2)dy=0$

$$\Rightarrow x^2(3ydx+xdy)+6xdx+3y^2dy=0$$

$$\Rightarrow d(x^3y)+3dx^2+dy^3=0$$

$$\Rightarrow \int d(x^3y)+\int 3dx^2+\int dy^3=0$$

$$\Rightarrow x^3y+3x^2+y^3=C$$

(3) $xy(y')^2+(x^2+y^2)y'+xy=0$

令 $u=y'$ 代回 ODE 可得 $xyu^2+(x^2+y^2)u+xy=0$

$$\Rightarrow (xu+y)(yu+x)=0$$

$$\Rightarrow xu+y=0 \quad \text{or} \quad yu+x=0$$

(a) $xu+y=0 \quad \Rightarrow \frac{1}{y}dy=-\frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy=-\int\frac{1}{x}dx$

$$\Rightarrow \ln|y|=-\ln|x|+\ln C_1$$

$$\Rightarrow xy=C_1$$

$$\Rightarrow xy-C_1=0$$

(b) $yu+x=0 \quad \Rightarrow ydy=-xdx \quad \Rightarrow \int ydy=-\int xdx$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+\overline{C_2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=C_2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-C_2=0$$

∴ 此 ODE 的解為 $(xy-C_1)(x^2+y^2-C_2)=0$