國立臺灣海洋大學河海工程學系 2026 工程數學(二)2AB 班課後練習 10 參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 已知若 $x>0$ 則 $f(x)=e^{-x}$，若 $x<0$ 則 $f(x)=0$，試求 $f(x)$ 之傅立葉積分，並求 $\int_0^\infty \frac{\cos 2\omega+\omega\sin 2\omega}{1+\omega^2}d\omega$ 之值。
2. 試求如下左式 $f(x)$ 之傅立葉積分，並求如下右式之積分值。

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases} \quad ; \quad \int_0^\infty \frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}d\omega$$

3. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}1-x, & -1\le x\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，試求函數 $f(x)$ 的傅立葉積分表示式並問

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2x)}{x}dx=?$$

4. 試求函數 $f(x)=|\cos x|$ 複數形式之傅立葉級數。
5. 已知函數 $f(x)=f(x+4)$，且在 $[0,4)$ 有 $f(x)=2x$ 試求 $f(x)$ 之複數形式與實數形式之傅立葉級數。
6. 已知 $f(x)$ 在 $|x|\le\frac{\pi}{2}$ 上有 $f(x)=\cos x$，其它區域均為 $f(x)=0$，試求函數 $f(x)$ 之傅立葉轉換，並求 $\int_0^\infty \frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}d\omega=?$
7. 已知 $x\in(-1,1)$ 有 $f(x)=1+\cos\pi x$ 其它為 $f(x)=0$，試求函數之傅立葉轉換 $F(\omega)$。

参考解答:

1. $f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$

且 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$

$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}$

$\therefore\ f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$

$\therefore\int_0^{\infty}\frac{\cos 2\omega+\omega\sin 2\omega}{1+\omega^2}d\omega=\pi\cdot f(2)=\pi\cdot e^{-2}$

2. $A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\cos\omega x\,dx$

. $=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x]\,dx$

$=\frac{1}{\pi}[\frac{\sin(\frac{1+\omega}{2}\pi)}{1+\omega}+\frac{\sin(\frac{1-\omega}{2}\pi)}{1-\omega}]$

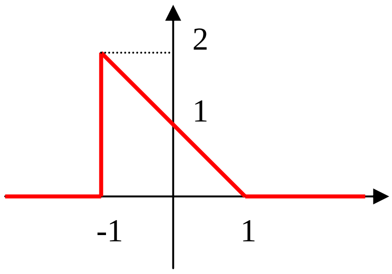
$=\frac{1}{\pi}[\frac{\cos\frac{\pi\omega}{2}}{1+\omega}+\frac{\cos\frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega}]$

$=\frac{1}{\pi}\frac{2}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}$

$f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}\cos\omega x\,d\omega$

$f(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}\,d\omega=1\quad\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}$

3. $f(x)=\int_0^\infty [A(\omega)\cos(\omega x)+B(\omega)\sin(\omega x)]\,d\omega$



其中 $A(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$

$B(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx$

又 $f(x)=\begin{cases}1-x, & -1\le x\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

$\therefore\ A(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x)\cos(\omega x)\,dx=\dfrac{2}{\pi\omega}\sin\omega$

$B(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x)\sin(\omega x)\,dx=\dfrac{2}{\pi\omega^2}(\omega\cos\omega-\sin\omega)$

$\therefore$ $f(x)$ 之傅立葉積分為

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega}[\sin\omega\cdot\cos(\omega x)+\frac{1}{\omega}(\omega\cos\omega-\sin\omega)\cdot\sin(\omega x)]\,d\omega$$

當 $x=1$ 時，

$$\int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega}[\sin\omega\cdot\cos(\omega)+\frac{1}{\omega}(\omega\cos\omega-\sin\omega)\cdot\sin(\omega)]\,d\omega=0$$

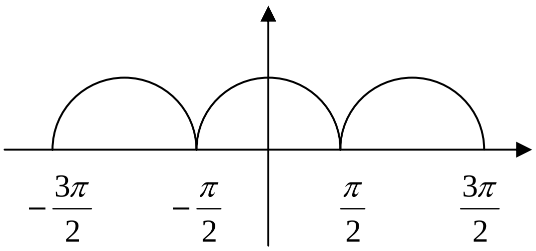
當 $x=-1$ 時，

$$\int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega}[\sin\omega\cdot\cos(\omega)-\frac{1}{\omega}(\omega\cos\omega-\sin\omega)\cdot\sin(\omega)]\,d\omega=\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2}=1$$

兩式相加可得 $\int_0^\infty \dfrac{4}{\pi\omega}\sin\omega\cdot\cos(\omega)\,d\omega=1$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{2\sin\omega\cdot\cos(\omega)}{\omega}\,d\omega=\int_0^\infty \frac{\sin(2\omega)}{\omega}\,d\omega=\int_0^\infty \frac{\sin(2x)}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

4.



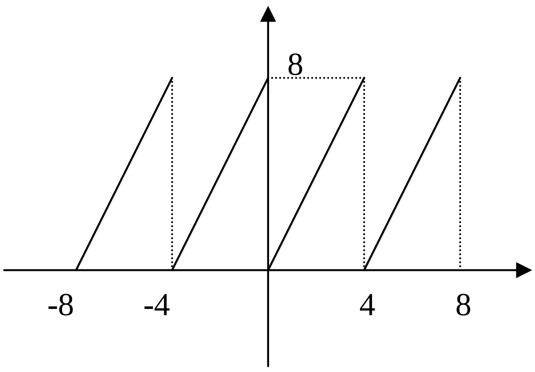
由圖可知 $f(x)$ 為偶函數且週期 $T=\pi \ \Rightarrow \omega_n=\dfrac{2n\pi}{T}=2n$

複數形式之傅立葉級數為 $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2inx}$

且 $c_n=\dfrac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega_n x}dx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\cos 2nx\,dx=\dfrac{2\cdot(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$

$\therefore\ f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}=\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}e^{2inx}$

5.



由題目可知此函數週期 $T=4 \;\Rightarrow \omega_n=\frac{2n\pi}{T}=\frac{n\pi}{2}$

實數形式之傅立葉級數:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\frac{\sin n\pi x}{2}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_0^4 2x\,dx=4$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos\frac{2n\pi x}{T}dx=\frac{1}{2}\int_0^4 2x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin\frac{2n\pi x}{T}dx=\frac{1}{2}\int_0^4 2x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{8}{n\pi}$$

$$f(x)=4-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

複數形式之傅立葉級數:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi}{2}x}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega_n x}dx=\frac{1}{4}\int_0^4 2x\cdot e^{-i\frac{n\pi}{2}x}\,dx=\frac{4i}{n\pi}$$

$\because \;\; n=0$ 時 $c_n\to\infty$

$\therefore \;\; c_0=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega_n x}dx=\frac{1}{4}\int_0^4 2x\,dx=4$

即 $\;f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}=4+\frac{4i}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}e^{i\frac{n\pi}{2}x}$

6. 此為偶函數

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos\omega x\,dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos\omega x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x]\,dx$$

$$=\frac{\sin\frac{(1+\omega)\pi}{2}}{1+\omega}+\frac{\sin\frac{(1-\omega)\pi}{2}}{1-\omega}$$

$$=\frac{2}{1-\omega^2}\cos\frac{\omega\pi}{2}$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1-\omega^2}\cos\frac{\omega\pi}{2}e^{i\omega x}d\omega$$

令 $x=0$ $\quad\Rightarrow f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1-\omega^2}\cos\frac{\omega\pi}{2}d\omega$

$$\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{2}{1-\omega^2}\cos\frac{\omega\pi}{2}d\omega=\frac{\pi}{2}f(0)=\frac{\pi}{2}$$

7. $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-1}^{1}[1+\cos\pi x]e^{-i\omega x}\,dx$

$$=2\int_0^1[1+\cos\pi x]\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{2\sin\omega}{\omega}+\int_0^1[\cos(\pi+\omega)x+\cos(\pi-\omega)x]\,dx$$

$$=\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{\sin(\pi+\omega)}{\pi+\omega}+\frac{\sin(\pi-\omega)}{\pi-\omega}$$

$$=(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\pi+\omega}+\frac{1}{\pi-\omega})\sin\omega$$