國立臺灣海洋大學河海工程學系 2026 工程數學(二)2AB 班課後練習 08 參考解答

系級：______________　　學號：____________　　姓名：___________

1. 取 C 為 $x+4y+z=12$ 在第一象限之邊界所形成之單連封閉，試計算場 $\vec{F}=(x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(z-y)\vec{k}$ 沿路徑 C 之線積分。

2. 對於場 $\vec{F}=x^2y\vec{i}-xy^2\vec{j}+z^2\vec{k}$，試計算 $\nabla\times\vec{F}$ 在 $x^2+y^2+z^2=4$ 上半球面之面積分。

3. 已知 $x\in(-\pi,0)$ 有 $f(x)=\pi+x$ 而 $x\in(0,\pi)$ 有 $f(x)=\pi-x$ 並且具有週期 2π
   (1) 請畫出函數 $f(x)$ 之圖形並計算 $f(x)$ 傅立葉級數展開。
   (2) 請由(1)所得之傅立葉級數，取 $-3\pi\le x\le 3\pi$，n 分別取 5 項、10 項、100 項繪圖。(請撰寫程式繪圖)

4. 已知 $f(x)=x$ 且 $-\pi<x<\pi$ 並且 $f(x)=f(x+2\pi)$
   (1) 請畫出函數 $f(x)$ 之圖形並計算 $f(x)$ 傅立葉級數展開。
   (2) 請由(1)所得之傅立葉級數，取 $-3\pi\le x\le 3\pi$，n 分別取 10 項、20 項、100 項繪圖。(請撰寫程式繪圖)

參考解答:

1. $x+4y+z=12$ 在第一象限之邊界可得

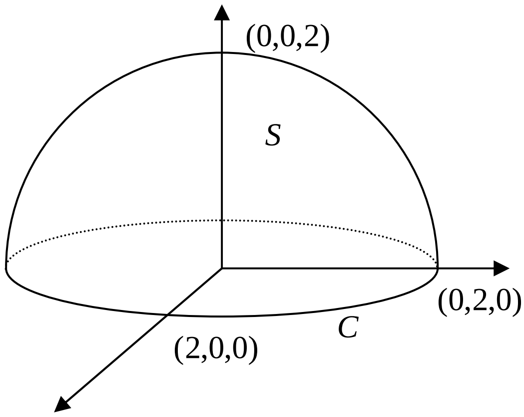
   由 Stokes 定理可知 $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA$

   ΔPQR 的單位法向量為 $\vec{n}=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}}{\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|}=\dfrac{\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{18}}$

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-z & y-x & z-y\end{vmatrix}=-(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

$$\therefore\ \iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\iint\frac{-6}{\sqrt{18}}dA=\frac{-6}{\sqrt{18}}A_{\Delta PQR}=\frac{-6}{\sqrt{18}}\sqrt{18}\,A_{\Delta OPQ}=-108$$

2.



由 Stokes 定理可知 $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C x^2y\,dx-xy^2dy$

令 $x=2\cos\theta \quad\Rightarrow dx=-2\sin\theta\,d\theta$

$y=2\sin\theta \quad\Rightarrow dy=2\cos\theta\,d\theta$

$$\int_C x^2y\,dx-xy^2dy=\int_0^{2\pi}(2\cos\theta)^2(2\sin)\theta(-2\sin\theta\,d\theta)-(2\cos\theta)(2\sin\theta)^2(2\cos\theta\,d\theta)$$

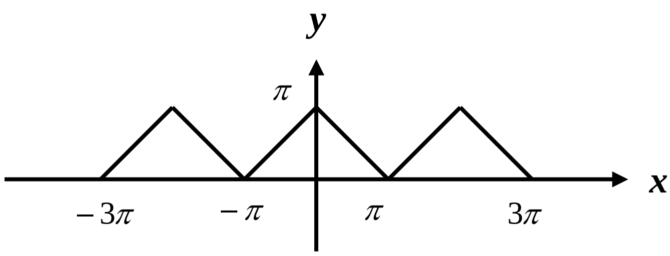
$$=-32\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=-8\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\,d\theta$$

$$=-8\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos4\theta}{2}d\theta$$

$$=-8\pi$$

3.



可看出此為偶函數

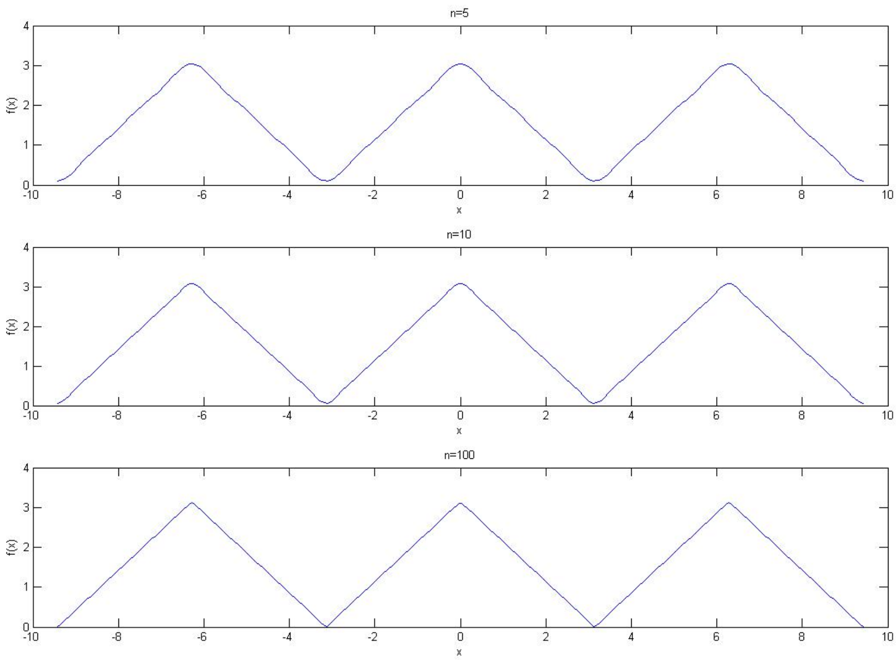
$\therefore\ f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{2n\pi}{T}x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$

其中 $b_n=0$

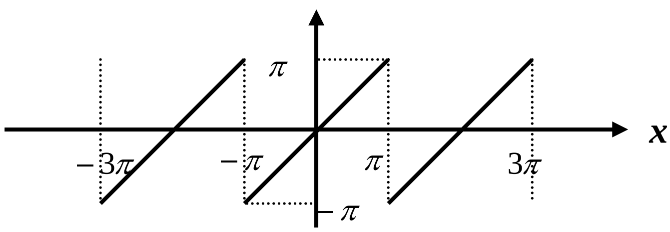
$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(\frac{2n\pi}{T}x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{2}{n^2\pi}[1-(-1)^n]$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^n]}{n^2}\cos(nx)$$



4.



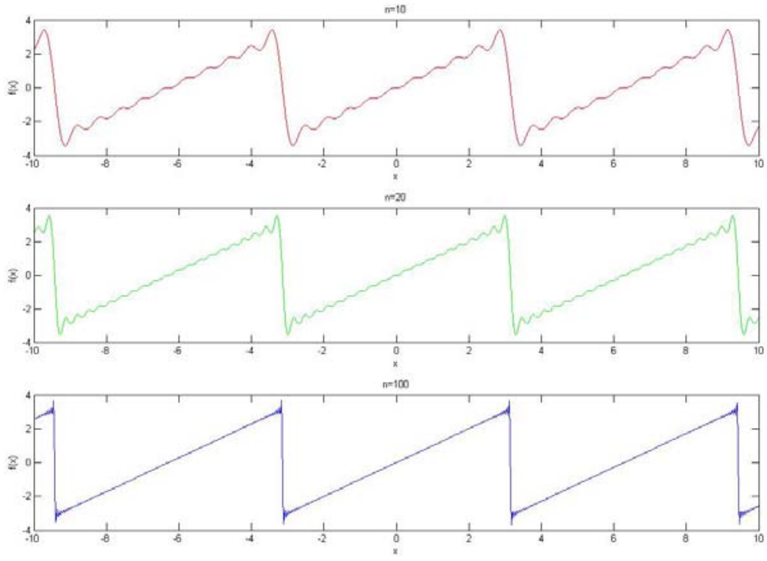
可看出此為奇函數

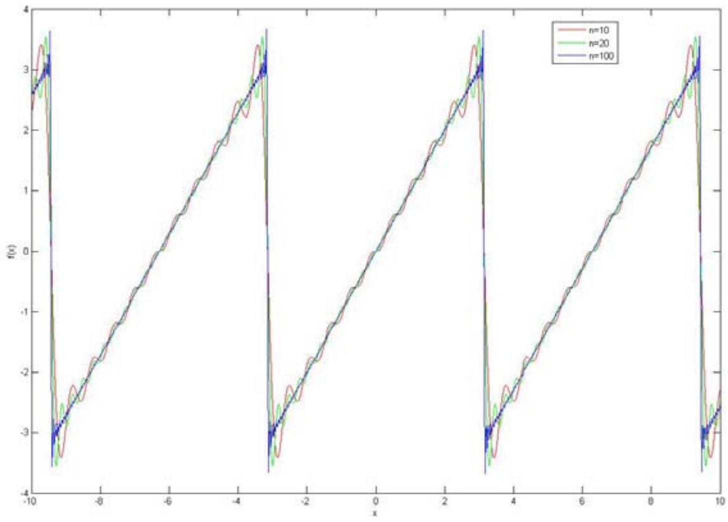
$$\therefore\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{2n\pi}{T}x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

其中 $a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2n\pi}{T}x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\therefore\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$


n=10
n=20
n=100
f(x)
x


n=10
n=20
n=100
f(x)
x