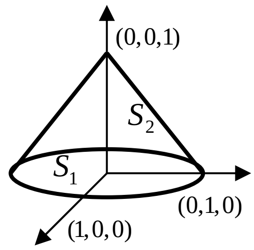
# 國立臺灣海洋大學河海工程學系 2026 工程數學(二)2AB 班課後練習 07 參考解答

系級：＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 試求場 $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+(z-x)\vec{k}$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 之通率。

2. 就 $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k}$ 在及以 $(0,0,0)$、$(a,0,0)$、$(0,b,0)$ 與 $(0,0,c)$ 為頂點之三角錐，試驗證散度定理。(分別以體積分與面積計算，並檢查是否相等)

3. 試求 $\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})dA$ 之值，其中 $\vec{F}=z^2\vec{k}$，$S$ 為圓椎體之封閉曲面。
   (a) 以散度定理計算
   (b) 直接以面積分計算




4. 試問橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之面積，及其內接矩形面積之極大值。

5. 試計算線積分 $\oint_{x^2+y^2=1}(y^2-8y)dx+(2xy+8x)dy$ 之值。

6. 取 $C$ 為連接 $(0,0)$、$(\frac{\pi}{2},0)$、$(\frac{\pi}{2},1)$ 之三角形封閉路徑，是請根據 $C$ 與向量場 $\vec{F}=(y-\sin x)\vec{i}+\cos x\,\vec{j}$，驗證平面格林定理。

**參考解答:**

1. 由散度定理 $\oiint_S (F\cdot\vec{n})\,dA=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{F})\,dV=\iiint_V 3\,dV=3\times\frac{4\pi}{3}=4\pi$

2. 散度定理: $\oiint_S (F\cdot\vec{n})\,dA=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{F})\,dV$

$\nabla\cdot\vec{F}=4$

$\therefore\ \iiint_V(\nabla\cdot\vec{F})\,dV=4\times V=4\times\frac{abc}{6}=\frac{2abc}{3}$

$S_1$: *x*-*y* 面，$S_2$: *x*-*z* 面，$S_3$: *y*-*z* 面，$S_4$: 斜面

$$\oiint_S (F\cdot\vec{n})\,dA=\iint_{S_1}(F\cdot\vec{n})\,dA+\iint_{S_2}(F\cdot\vec{n})\,dA+\iint_{S_3}(F\cdot\vec{n})\,dA+\iint_{S_4}(F\cdot\vec{n})\,dA$$

$$\because\ \iint_{S_1}(F\cdot\vec{n})\,dA=\iint_{S_2}(F\cdot\vec{n})\,dA=\iint_{S_3}(F\cdot\vec{n})\,dA=0$$

$$\therefore\ \oiint_S (F\cdot\vec{n})\,dA=\iint_{S_4}(F\cdot\vec{n})\,dA$$

$$\vec{n}=\frac{(-a,b,0)\times(-a,0,c)}{\left|(-a,b,0)\times(-a,0,c)\right|}=\frac{(bc,ac,ab)}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$$

斜面 $S_4$ 方程式 $(x-a,y,z)\cdot\frac{(bc,ac,ab)}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=0$

$$\Rightarrow bc(x-a)+acy+abz)=0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

$$\iint_{S_4}(F\cdot\vec{n})\,dA=\iint_{S_4}(x\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k})\cdot\frac{bc\vec{i}+ac\vec{j}+ab\vec{k}}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}dA$$

$$=\iint_{S_4}\frac{bcx+acy+2abz}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}dA$$

∵斜面三角形面積分比較難計算

∴投影至 *xy* 平面計算

故 $dA=\frac{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{ab}dxdy$

$$\iint_{S_4}(F\cdot\vec{n})\,dA=\int_0^b\int_0^{a-\frac{ay}{b}}\frac{bcx+acy+2abz}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}\cdot\frac{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{ab}dxdy$$

$$=\int_0^b\int_0^{a-\frac{a}{b}y}\left(\frac{c}{a}x+\frac{c}{b}y+2z\right)dxdy$$

$$=\int_0^b\int_0^{a-\frac{a}{b}y}\left[\frac{c}{a}x+\frac{c}{b}y+2\left(c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y\right)\right]dxdy$$

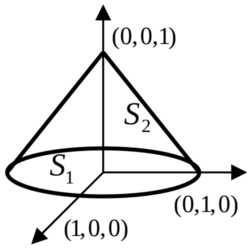
$$= \int_0^b \int_0^{a-\frac{a}{b}y} (2c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y) dxdy$$

$$= \frac{2abc}{3}$$

∵由面積分與體積分所得結果相同

∴可驗證散度定理

3.




(a) 散度定理: $\oiint_S (F \cdot \vec{n}) dA = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$

$\nabla \cdot \vec{F} = 2z$

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} 2z \, r dr d\theta dz = \frac{\pi}{6}$$

(b) $\oiint_S (F \cdot \vec{n}) dA = \iint_{S_1} (F \cdot \vec{n}) dA + \iint_{S_2} (F \cdot \vec{n}) dA$

∵ $\iint_{S_1} (F \cdot \vec{n}) dA = 0$

∴ $\oiint_S (F \cdot \vec{n}) dA = \iint_{S_2} (F \cdot \vec{n}) dA$

圓椎面方程式: $x^2 + y^2 = (1-z)^2$

令 $x = (1-z)\cos\theta$

$y = (1-z)\sin\theta$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (1-z)\cos\theta\,\vec{i} + (1-z)\sin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}_\theta = -(1-z)\sin\theta\,\vec{i} + (1-z)\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{r}_z = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z}{\left|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z\right|} = \frac{(1-z)\cos\theta\,\vec{i} + (1-z)\sin\theta\,\vec{j} + (1-z)\vec{k}}{\sqrt{(1-z)^2\cos^2\theta + (1-z)^2\sin^2\theta + (1-z)^2}} = \frac{\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$dA = \left|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z\right| d\theta\, dz = \sqrt{2}\,(1-z) d\theta\, dz$$

$$\iint_{S_2} (F \cdot \vec{n}) dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (z^2 \vec{k}) \cdot \frac{\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}} \sqrt{2}\,(1-z) d\theta\, dz = \frac{\pi}{6}$$

4. 由格林定理可知 $\int -ydx + xdy = \iint 2\,dxdy = 2A$

$$A = \frac{1}{2}\int -ydx + xdy$$

又橢圓之參數表示式為 $x = a\cos\theta \quad \Rightarrow dx = -a\sin\theta\, d\theta$

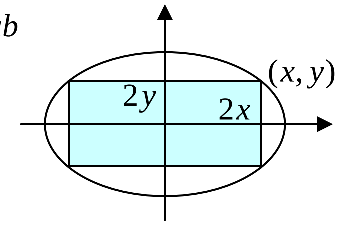
$y = b\sin\theta \quad \Rightarrow dy = b\cos\theta\, d\theta$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -(b\sin\theta)(-a\sin\theta\, d\theta) + (a\cos\theta)(a\cos\theta\, d\theta) = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi ab$$

在橢圓上一點 $(x, y)$ 其內接矩形面積為 $A = 4xy$

$\therefore A = 4xy = 4a\cos\theta \cdot b\sin\theta = 2ab\sin 2\theta \le 2ab$

故內接矩形最大面積為 $2ab$



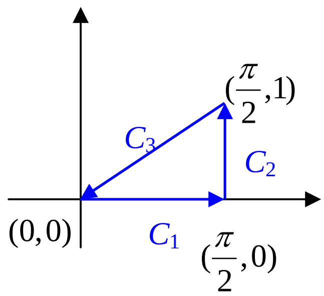

5. 由格林定理可知

$$\oint_{x^2+y^2=1} (y^2 - 8y)dx + (2xy + 8x)dy = \iint_{x^2+y^2\le 1} [\frac{\partial(2xy+8x)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2-8y)}{\partial y}]dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (2y + 8 - 2y + 8)\, dxdy$$

$$= 16\pi$$

6.




格林定理: $\int Pdx + Qdy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

由面積分: $\iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy = \iint (\frac{\partial(\cos x)}{\partial x} - \frac{\partial(y - \sin x)}{\partial y})\, dxdy$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{2}{\pi}x} (\sin x + 1)dydx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x + x)dx$$

$$= -(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi})$$

由線積分: $\int_C Pdx+Qdy=\int_{C_1} Pdx+Qdy+\int_{C_2} Pdx+Qdy+\int_{C_3} Pdx+Qdy$

路徑 $C_1$: $y=0$, $x=0\to\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \int_{C_1} Pdx+Qdy=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-1$

路徑 $C_2$: $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0\to 1$ $\Rightarrow \int_{C_2} Pdx+Qdy=\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}dy=0$

路徑 $C_3$: $y=\frac{2}{\pi}x$ $\Rightarrow dy=\frac{2}{\pi}dx$, $x=\frac{\pi}{2}\to 0$

$$\Rightarrow \int_{C_3}(y-\sin x)\,dx+\cos x\,dy=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(\frac{2}{\pi}x-\sin x+\frac{2}{\pi}\cos x)\,dx$$

$$=(\frac{1}{\pi}x^2+\cos x+\frac{2}{\pi}\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0$$

$$=1-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}$$

$\therefore \int_C Pdx+Qdy=-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}$

由面積分與線積分相等可驗證格林定理