國立臺灣海洋大學河海工程學系 2026 工程數學(二)2AB 班課後練習 06 參考解答

系級：____________ 學號：___________ 姓名：__________

1. 試求向量場 $\vec{F} = 3x^2y^2\,\vec{i} + (2x^3y - e^z)\,\vec{j} + (2z - ye^z)\,\vec{k}$，試問此向量沿任意路徑自 $(1, -2, -1)$ 至 $(-2, 3, 1)$ 之線積分值。

2. 試計算 $\int_C (5y^3 + 20x^4y^2)\,dx + (15xy^2 + 8x^5y - 3)\,dy$，路徑 C 為 $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$ 由點 $(0, 0)$ 到點 $(2, 1)$

3. 試計算 $\int_C 3x^2dx + 2yz\,dy + y^2\,dz$，其中路徑 C 為沿空間曲線

   $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + (1-2t)\,\vec{j} + (2+5t)\vec{k}$ 自 $(0, 1, 2)$ 到 $(1, -1, 7)$

4. 對於向量場 $\vec{F} = kxyz^2\vec{i} + (x^2z^2 + z\cos yz)\vec{j} + (kx^2yz + y\cos yz)\vec{k}$，試問此場為保守場之 k 值，並問自 $(1, \frac{\pi}{4}, 2)$ 至 $(2, \frac{\pi}{2}, 4)$ 之線積分。

5. 試求向量場 $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$ 在以 $(1,0,0)$ 、$(0,2,0)$ 與 $(0,0,3)$ 為頂點之三角平面上之面積分，即 $\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dA = ?$

6. 試求場 $\vec{F} = y^3\,\vec{i} + x^3\,\vec{j} + z^3\,\vec{k}$ 通過曲面 $S: x^2 + 4y^2 = 4,\ z \in [0, h]$ 在第一象限部份之通率。

參考解答:

1. ∵ 沿任意路徑

∴ 先檢查是否為保守場

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2y^2 & (2x^3y-e^z) & (2z-ye^z)\end{vmatrix}=0$$

∴此為保守場並存在 $\nabla\phi=\vec{F}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=3x^2y^2 \quad \Rightarrow \phi=x^3y^2+f_1(y,z)2$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=2x^3y-e^z \quad \Rightarrow \phi=x^3y^2-ye^z+f_2(x,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=2z-ye^z \quad \Rightarrow \phi=z^2-ye^z+f_3(x,y)$$

比較後可得 $\phi(x,y,z)=x^3y^2-ye^z+z^2+c$

自 $(1,-2,-1)$ 至 $(-2,3,1)$ 之線積分值為 $\phi(-2,3,1)-\phi(1,-2,-1)=-76-3e-\dfrac{2}{e}$

2 ∵ 積分路徑較為複雜

∴ 先檢查是否為保守場

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 5y^3+20x^4y^2 & 15xy^2+8x^5y-3 & 0\end{vmatrix}=0$$

∴此為保守場並存在 $\nabla\phi=\vec{F}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=5y^3+20x^4y^2 \qquad \text{d}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=15xy^2+8x^5y-3 \quad \Rightarrow \phi=5xy^3+4x^5y^2-3y+f_2(x)$$

比較後可得 $\phi(x,y)=5xy^3+4x^5y^2-3y+c$

自 $(0,0)$ 到點 $(2,1)$ 之線積分值為 $\phi(2,1)-\phi(0,0)=135$

3. $\vec{r}(t)=t^2\,\vec{i}+(1-2t)\,\vec{j}+(2+5t)\vec{k}$ 自 $(0,1,2)$ 到 $(1,-1,7)$ 表示 $t:0\to 1$

又 $\vec{r}=x\vec{i}+y\,\vec{j}+z\vec{k}$ 可知

$$x=t^2 \quad \Rightarrow dx=2t\,dt$$
$$y=1-2t \quad \Rightarrow dy=-2\,dt$$
$$z=2+5t \quad \Rightarrow dz=5\,dt$$

$$\int_C 3x^2dx+2yz\,dy+y^2\,dz=\int_0^1[3t^4\cdot 2t-4(1-2t)(2+5t)+5(1-2t)^2]\,dt=6$$

4. 此為保守場，故有 $\nabla\times\vec{F}=0$

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ kxyz^2 & x^2z^2+z\cos yz & kx^2yz+y\cos yz\end{vmatrix}$$
$$=[(kx^2z+\cos yz-yz\sin yz)-(2x^2z+\cos yz-yz\sin yz]\vec{i}$$
$$+(2kxyz-2kxyz)\,\vec{j}+(2xz^2+kxz^2)\vec{k}=0$$
$$\Rightarrow k=2$$

且 $\nabla\phi=\vec{F}$ ，即

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xyz^2 \qquad\qquad \phi=x^2yz^2+f(y,z)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2z^2+z\cos yz \quad\Rightarrow\quad \phi=x^2yz^2+\sin yz+g(x,z)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=2x^2yz+y\cos yz \qquad \phi=x^2yz^2+\sin yz+h(x,y)$$

$$\therefore\ \phi(x,y,z)=x^2yz^2+\sin yz+c$$

場 $\vec{F}$ 自 $(1,\dfrac{\pi}{4},2)$ 至 $(2,\dfrac{\pi}{2},4)$ 之線積分為 $\phi(2,\dfrac{\pi}{2},4)-\phi(1,\dfrac{\pi}{4},2)=31\pi-1$

5. 在以 $A(1,0,0)$ 、$B(0,2,0)$ 與 $C(0,0,3)$ 三角平面之法向量為

$\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$

$$\vec{n}=\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{6\vec{i}+3\,\vec{j}+2\vec{k}}{7}$$

平面方程式為 $6x+3y+2z=6$

$$\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dA = \iint_S (x^2\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + xz\,\vec{k})\cdot\frac{6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}}{7}\,dA = \iint_S \frac{6x^2+3xy+2xz}{7}\,dA$$

$\because$ ΔABC 面積分比較難計算

$\therefore$ 投影至 xy 平面計算

故 $dA = \frac{7}{2}dxdy$

$$\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dA = \iint_S \frac{6x^2+3xy+2xz}{7}\,dA$$

$$= \int_0^2\int_0^{1-\frac{y}{2}} \frac{6x^2+3xy+x(6-6x-3y)}{7}\frac{7}{2}dxdy$$

$$= 1$$

6. $\because$ 曲面 $S: x^2+4y^2=4$, $z\in[0,h]$

$\therefore$ 可知此為橢圓柱狀

令 $\phi = x^2+4y^2-4$

法向量 $\vec{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2x\,\vec{i}+8y\,\vec{j}}{\sqrt{(2x)^2+(8y)^2}} = \frac{x\,\vec{i}+4y\,\vec{j}}{\sqrt{x^2+16y^2}}$

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = 2\sqrt{1-y^2}\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\vec{r}_y = \frac{-2y}{\sqrt{1-y^2}}\vec{i} + \vec{j}\,, \quad \vec{r}_z = \vec{k}$$

$$dA = |\vec{r}_y\times\vec{r}_z|\,dy\,dz = \sqrt{\frac{3y^2+1}{1-y^2}}\,dy\,dz = \sqrt{\frac{12y^2+4}{x^2}}\,dy\,dz = \frac{\sqrt{x^2+16y^2}}{x}\,dy\,dz$$

$$\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dA = \iint_S (y^3\,\vec{i} + x^3\,\vec{j} + z^3\,\vec{k})\cdot\frac{x\,\vec{i}+4y\,\vec{j}}{x}\,dy\,dz$$

$$= \int_0^h\int_0^1 [y^3 + 4y(4-4y^2)]\,dy\,dz$$

$$= \frac{17}{4}h$$