國立臺灣海洋大學河海工程學系 2026 工程數學(二)2AB 班課後練習 05

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 令 $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$, $\vec{G}=U\vec{i}+V\vec{j}+W\vec{k}$ ，試證明:

   (1) $\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{G}\cdot(\nabla\times\vec{F})-\vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G})$

   (2) $\nabla(\vec{F}\cdot\vec{G})=(\vec{F}\cdot\nabla)\vec{G}+(\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F}+\vec{F}\times(\nabla\times\vec{G})+\vec{G}\times(\nabla\times\vec{F})$

   (3) $\nabla\times(\nabla\times\vec{F})=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$

2. 給一向量函數 $\vec{F}(x,y,z)=F_1\vec{i}+F_2\vec{j}+F_3\vec{k}$ 又

   $$curl\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=(-4y^3z^6-4x^5y^2)\,\vec{i}-4z^3\ \vec{j}+(20x^4y^2z-3x^2y^2)\,\vec{k}$$

   $$div\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=2xy^3+8x^5yz-6y^4z^5$$

   試找出可能之 F_1,F_2 與 F_3 。(Hint: 此為非唯一解，試由觀察來得可能之解)

3. 試求 $\int_C x^2y\,ds$ 而 C 之路徑為 $\vec{r}(t)=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}$ 且 $t\in[0,\pi]$

4. 試求 $\int_C (xy+z)\,ds$, 其中 C 為球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 與平面 $3z=4y$ 之交線。

5. 試求 $\int_C y^2dx-xy\,dy$ 而 C 為 $y=3x-x^2$ 且 $x\in[0,3]$

6. 試求場 $\vec{F}=xy\vec{i}+(3x-y^2)\,\vec{j}$，試問自 $(5,6)$ 至 $(3,3)$ 之直線線積分值，自 $(5,6)$ 經 $(5,3)$ 至 $(3,3)$ 之折線線積分值，並問 $\vec{F}$ 是否為保守場。

7. 試計算線積分 $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ，其中 $\vec{F}=6x^2\,\vec{i}-2x\,\vec{j}$ 路徑 C 為由 $(5,4)\rightarrow(1,3)\rightarrow(0,1)\rightarrow(5,1)$ 之三條直線所組成。