國立臺灣海洋大學河海工程學系 2026 工程數學(二)2AB 班課後練習 01 參考解答

系級：＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 試證：$\vec{A}$與$\vec{B}$外積之向量必然會垂直$\vec{A}$與$\vec{B}$，即$\vec{A}\times\vec{B}\perp\vec{A}$與$\vec{A}\times\vec{B}\perp\vec{B}$。

2. 試證：$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$

3. 試求 y 與 z 使點 $A(-1,3,2)$、$B(-4,2,-2)$ 與 $C(8,y,z)$ 會落於同一直線上。

4. 若已知向量 $\vec{A}=(2,3,x)$、$\vec{B}=(-1,2,0)$ 與 $\vec{C}=(-1,1,2)$ 共面，試求 $x=?$

5. 對於向量 $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{k}$、$\vec{B}=\hat{j}-\hat{k}$ 與 $\vec{C}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$，試問：$\vec{A}$ 與 $\vec{B}$、$\vec{C}$ 所張開平面其法方向之夾角。

參考解答:

1.

$$
\begin{aligned}
(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{A}&=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\\
&=(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\vec{k})\cdot(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\\
&=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}a_1-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}a_2+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}a_3\\
&=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\\
&=0
\end{aligned}
$$

可知 $\vec{A}\times\vec{B}\perp\vec{A}$

同理可證：$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{B}=0$，即 $\vec{A}\times\vec{B}\perp\vec{B}$

故得證

2.

$$\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$= \sqrt{\left|\vec{A}\right|^2\left|\vec{B}\right|^2 - \left|\vec{A}\right|^2\left|\vec{B}\right|^2\cos^2\theta}$$
$$= \sqrt{(\vec{A}\cdot\vec{A})(\vec{B}\cdot\vec{B})-(\vec{A}\cdot\vec{B})^2}$$
$$= \sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}$$
$$= \sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2}$$
$$= \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$
$$= \left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$$

其中 $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \sqrt{(\vec{A}\cdot\vec{A})(\vec{B}\cdot\vec{B})-(\vec{A}\cdot\vec{B})^2}$ 稱為 Lagrange identity

3. $\overrightarrow{AB} = (-4,2,-2)-(-1,3,2) = (-3,-1,-4)$

$\overrightarrow{AC} = (8,y,z)-(-1,3,2) = (9,y-3,z-2)$

$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \dfrac{9}{-3} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-2}{-4} \quad \Rightarrow y=6,\ z=14$

4. $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow x = -14$

5. $\vec{N} = (\vec{B}\times\vec{C}) = 2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$

$\vec{u}_N = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})$

$\vec{u}_A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i}-2\hat{k})$

$\theta = \cos^{-1}(\vec{u}_N\cdot\vec{u}_A) \quad \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\dfrac{4}{\sqrt{30}}$