

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 試判定下列函數那些是奇函數，那些是偶函數，那些是非奇非偶函數？(12%)

(請說明判斷理由，無說明者不給分)

(1) $f(x) = \sin^3 x + 1$ (2) $f(x) = x \sin^3 x + 1$

(3) $f(x) = \cos^3 x + 1$ (4) $f(x) = x \cos^3 x + 1$

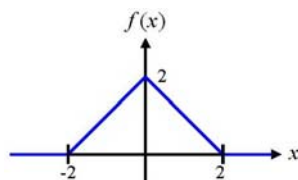
2. 試求函數 $f(x) = \cos^3 2x + \sin^5 x$ 的傅立葉級數展開。(8%)

3. 給一週期函數 $f(x) = x^2$, $-1 < x < 1$ 且 $f(x) = f(x+2)$, 試求:

(1) 此函數之傅立葉級數展開。(6%) (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$ (4%)

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = ?$ (4%) (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = ?$ (4%) (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = ?$ (4%)

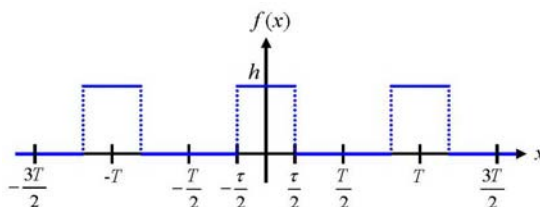
4. 給一函數如下圖所示



(1) 試求 $f(x)$ 的傅立葉積分表示式。(7%)

(2) 試問 $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos 2\omega}{\omega^2} d\omega = ?$ (3%)

5. 把寬為 τ , 高為 h , 週期為 T 的矩形波(如下圖)展開成複數形式傅立葉級數。
(10%)



6. 若 $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & t < 0 \text{ and } t > \pi \end{cases}$ 且 $g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & t < 0 \text{ and } t > \pi \end{cases}$

(1) 試問其傅立葉轉換 $F(\omega)$ 與 $G(\omega)$ 為何？(10%)

(2) 若 $p(t) = g(t - \pi)$, 則其傅立葉轉換 $P(\omega) = ?$ (4%)

(3) 若 $q(t) = \frac{dg(t)}{dt}$, 則其傅立葉轉換 $Q(\omega) = ?$ (4%)

(4) $h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = ?$ (5%)

(hint: 請將 t 分成 $t < 0$, $0 \leq t \leq \pi$, $\pi \leq t \leq 2\pi$ 與 $t > 2\pi$ 討論)

(5) $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt = ?$ (5%)

7. 已知函數 $f(x) = e^{-a|x|}$ 且 $a > 0$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$ ，試求

函數 $\frac{6e^{i\omega} \cos(4\omega)}{9 + \omega^2}$ 的傅立葉逆轉換為何? (10%)

傅立葉級數展開

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x) dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

傅立葉積分： $f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega$

$$\text{其中 } A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

傅立葉複數形式級數展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}, \quad \text{其中 } \omega_n = \frac{2n\pi}{T}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\omega_n x} dx$$

傅立葉轉換： $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$

傅立葉反轉換： $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

Convolution： $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau \Rightarrow \mathcal{F}[f(t) * g(t)] = F(\omega) \cdot G(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)] = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$

$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad \text{其中 } a < x_0 < b$

尤拉公式： $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ 與 $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

Scaling： $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Time shifting： $\mathcal{F}[f(t - T)] = e^{-i\omega T} F(\omega)$

Frequency shifting： $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0)$