國立臺灣海洋大學河海工程學系 2026 工程數學(二) 第一次大考參考解答

系級：______________　　學號：____________　　姓名：___________

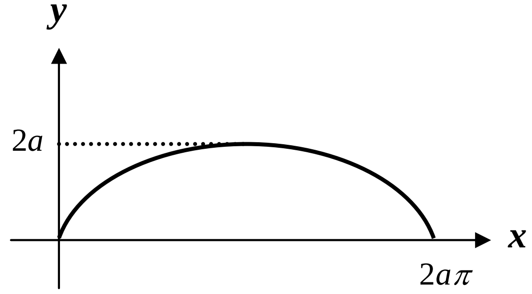
1. 有一平面過 A、B、C 三點，其座標分別為 $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ 與 $(1,2,3)$ ，試問:
   (1) 此平面方程式為何? (3%)
   (2) A、B、C 三點所建構之三角形各頂點的角度為何? (6%)
   (3) 此平面的單位法線向量為何? (3%)
   (4) ΔABC 的面積為何? (3%)
   (5) 平面外一點 $P(1,1,3)$ 到此平面之最短距離 d 為何? (3%)
   (6) A 、B 、C 與 P 點所構成之四面體體積 V 為何? (3%)

2. 給一純量函數 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{z}\sqrt{6x^2+8y^2}$ 與一橢球曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$，試回答下列問題:
   (1) 橢球曲面上點 $P(1,1,1)$ 處的向外單位法向量。(5%)
   (2) 純量函數 f 在點 P 處沿向外法線方向的方向導數。(5%)

3. 已知 $f=xz-yz$, $\vec{A}=y^2\vec{i}+(y^2-x^2)\vec{j}+2z^2\vec{k}$ ，試求:
   (1) $\nabla^2(xzf)$ (2) $\nabla\cdot(\nabla f)$ (3) $\nabla\times\vec{A}$ (4) $\nabla(\nabla\cdot\vec{A})$ (5) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})$ (15%)

4. (1) 若向量場 $\vec{F}=Ax\ln z\,\vec{i}+By^2z\,\vec{j}+(\dfrac{x^2}{z}+y^3)\vec{k}$ 為保守場，則實數 A、B 分別為何? (5%)
   (2) 令 C 為由 $(1,1,1)$ 到 $(2,2,1)$ 的線段，試求 $\int_C 2x\ln z\,dx+2y^2zdy+(\dfrac{x^2}{z}+y^3)dz$ 之值。 (5%)

5. 給一擺線如下圖。$\vec{r}(t)=a(t-\sin t)\vec{i}+a(1-\cos t)\vec{j}$ ，其中 $a>0$ 且 $0\le t\le 2\pi$
   (1) 試計算擺線之弧長。 (6%)
   (2) 給定 $P=-y$ 與 $Q=x$ ，試由格林定理來求擺線與 x 軸所交之面積。 (6%)
   (3) 試求在 $t=\pi$ 之曲率 κ 。 (6%)



6. 已知場 $\vec{F} = 3y\vec{i} - xz\vec{j} + yz^2\vec{k}$ ，曲面 S_1 為 $z = x^2 + y^2, z < 1$ 之部分與 $S_2 : z = 1$ ，

Γ 為 S_1 、 S_2 之交線，試問:

(1) 試畫出 S_1 之圖形，並標出 S_1 、 S_2 與 Γ 。 (4%)

(2) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。 (2%)

(3) S_1 上的單位法向量 $\vec{n} = ?$ (4%)

(4) $\oiint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = ?$ (4%)

(5) $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$ (4%)

(6) $\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ (4%)

(7) $\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ (4%)

Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$ **(3D)** $\iint \nabla \cdot \vec{F}\, dA = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ **(2D)**

格林定理: $\int P\,dx + Q\,dy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy$

Stokes 旋度定理: $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

曲率: $\kappa = \dfrac{|y''(x)|}{[1 + (y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率:** $\tau = \left| \dfrac{d(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}{ds} \right|$

二倍角公式: $\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$ **,** $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$

四面體體積: $V = \dfrac{1}{3} A_0 h$ **, 圓錐體積體積:** $V = \dfrac{1}{3} A_0 h$ **(** A_0 **: 底面積;** h **: 高)**

球座標: $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$ **,** $z = r\cos\theta$

微小球面面積 $dA = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ **(** θ **:俯仰角;** ϕ **:水平角)**

Lagrange 恆等式: $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(\vec{A} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2}$

[參考解答]

1. 有一平面過 A、B、C 三點，其座標分別為 $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ 與 $(1,2,3)$，試問:

(1) 此平面方程式為何? (3%)

(2) A、B、C 三點所建構之三角形各頂點的角度為何? (6%)

(3) 此平面的單位法線向量為何? (3%)

(4) ΔABC 的面積為何? (3%)

(5) 平面外一點 $P(1,1,3)$ 到此平面之最短距離 d 為何? (3%)

(6) A、B、C 與 P 點所構成之四面體體積 V 為何? (3%)

(1) $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{BC}=(0,1,2)$

法向量為 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

平面上任一點 $R(x,y,z)$ 且 $\overrightarrow{OR}\perp(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$

$\therefore \overrightarrow{OR}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=0 \quad \Rightarrow x-2y+z=0$

(2) $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{6}{\sqrt{42}} \quad \Rightarrow \alpha=\cos^{-1}(\dfrac{6}{\sqrt{42}})=0.3876\,(\text{rad})=22.21^\circ$

$\cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{-3}{\sqrt{15}} \quad \Rightarrow \beta=\cos^{-1}(\dfrac{-3}{\sqrt{15}})=2.4569\,(\text{rad})=140.77^\circ$

$\cos\gamma=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\dfrac{8}{\sqrt{70}} \quad \Rightarrow \gamma=\cos^{-1}(\dfrac{8}{\sqrt{70}})=0.2971\,(\text{rad})=17.02^\circ$

(3) 單位法向量 $\vec{n}=\pm\dfrac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}=\pm\dfrac{\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{6}}$

(4) $\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(5) $\overrightarrow{AP}=(1,1,3)$ 投影到平面法線方向之距離，即為最短距離 d

$d=\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

(6) $V=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\right|=\dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{3}$

2. 給一純量函數 $f(x,y,z)=\frac{1}{z}\sqrt{6x^2+8y^2}$ 與一橢球曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$，試回答下列問題:

(1) 橢球曲面上點 $P(1,1,1)$ 處的向外單位法向量。(5%)

(2) 純量函數 f 在點 P 處沿向外法線方向的方向導數。(5%)

(1) 令 $\phi=2x^2+3y^2+z^2-6$

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}=4x\vec{i}+6y\vec{j}+2z\vec{k}$$

$$\nabla\phi\Big|_{(1,1,1)}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\vec{n}=\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}=\frac{4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{56}}=\frac{2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{14}}$$

(2) $$\nabla f=\frac{12x}{2z\sqrt{6x^2+8y^2}}\vec{i}+\frac{16y}{2z\sqrt{6x^2+8y^2}}\vec{j}-\frac{1}{z^2}\sqrt{6x^2+8y^2}\,\vec{k}$$

$$\nabla f\cdot\vec{n}\Big|_{(1,1,1)}=\left(\frac{6}{\sqrt{14}}\vec{i}+\frac{8}{\sqrt{14}}\vec{j}-\sqrt{14}\,\vec{k}\right)\cdot\frac{2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{14}}=\frac{12}{14}+\frac{24}{14}-1=\frac{11}{7}$$

3. 已知 $f=xz-yz$，$\vec{A}=y^2\vec{i}+(y^2-x^2)\vec{j}+2z^2\vec{k}$，試求:

(1) $\nabla^2(xzf)$ (2) $\nabla\cdot(\nabla f)$ (3) $\nabla\times\vec{A}$ (4) $\nabla(\nabla\cdot\vec{A})$ (5) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})$ (15%)

(1) $$\nabla^2(xzf)=\frac{\partial^2(x^2z^2-xyz^2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(x^2z^2-xyz^2)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(x^2z^2-xyz^2)}{\partial z^2}$$
$$=2x^2+2z^2-2xy$$

(2) $$\nabla\cdot(\nabla f)=\nabla^2 f=\frac{\partial^2(xz-yz)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(xz-yz)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(xz-yz)}{\partial z^2}=0$$

(3) $$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & y^2-x^2 & 2z^2\end{vmatrix}=-2(x+y)\vec{k}$$

(4) $$\nabla(\nabla\cdot\vec{A})=\nabla\left(\frac{\partial(y^2)}{\partial x}+\frac{\partial(y^2-x^2)}{\partial y}+\frac{\partial(2z^2)}{\partial z}\right)$$
$$=\nabla(2y+4z)$$
$$=2\vec{j}+4\vec{k}$$

(5) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$

∵任何旋轉場不具有發散性

4. (1) 若向量場 $\vec{F}=Ax\ln z\,\vec{i}+By^2z\,\vec{j}+(\frac{x^2}{z}+y^3)\vec{k}$ 為保守場，則實數 A、B 分別為何？ (5%)

(2) 令 C 為由 $(1,1,1)$ 到 $(2,2,1)$ 的線段，試求 $\int_C 2x\ln z\,dx+2y^2zdy+(\frac{x^2}{z}+y^3)dz$ 之值。 (5%)

(1) $\vec{F}$ 為保守場 $\Rightarrow\ \nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ Ax\ln z & By^2z & \frac{x^2}{z}+y^3\end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow\ (3y^2-By^2)\vec{i}+(\frac{Ax}{z}-\frac{2x}{z})\vec{j}+0\vec{k}=0$$

$$\Rightarrow\ A=2,\ B=3$$

(2) C 為由 $(1,1,1)$ 到 $(2,2,1)$ 的線段

$\therefore$ 可得 $x=t+1,\ y=t+1,\ z=1\quad(t=0\to1)$

$\Rightarrow\ dx=dt,\quad dy=dt,\ dz=0$

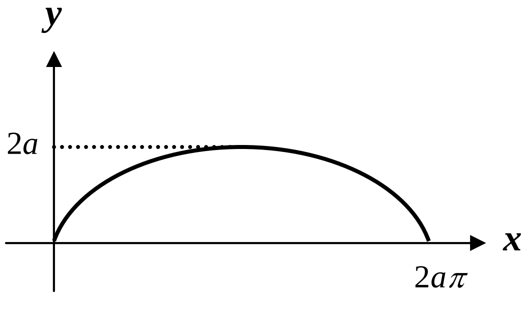
$$\int_C 2x\ln z\,dx+2y^2zdy+(\frac{x^2}{z}+y^3)dz=\int_0^1 2(t+1)^2dt=\frac{14}{3}$$

5. 給一擺線如下圖。$\vec{r}(t)=a(t-\sin t)\vec{i}+a(1-\cos t)\vec{j}$，其中 $a>0$ 且 $0\le t\le 2\pi$

(1) 試計算擺線之弧長。 (6%)

(2) 給定 $P=-y$ 與 $Q=x$，試由格林定理來求擺線與 x 軸所交之面積。 (6%)

(3) 試求在 $t=\pi$ 之曲率 κ。 (6%)



(1) $\vec{r}(t)=x\vec{i}+y\vec{j}=a(t-\sin t)\vec{i}+a(1-\cos t)\vec{j}$

$\therefore\quad x=a(t-\sin t)\quad\Rightarrow dx=a(1-\cos t)\,dt$

$\quad\ \ y=a(1-\cos t)\quad\Rightarrow dy=a\sin t\,dt$

$$S=\int ds=\int|d\vec{r}|=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\ dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}\ dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\ dt$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\ dt$$

$$= -4a\cdot\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 8a$$

(2) $\oint -ydx + xdy = 2\iint dxdy = 2A$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\oint -ydx + xdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0} [-a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt + a(t-\sin t)\cdot a\sin t dt]$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{0} (-1+2\cos t - \cos^2 t + t\sin t - \sin^2 t)dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{0} (-2+2\cos t + t\sin t)dt$$

$$= \frac{a^2}{2}(-2t + 2\sin t - t\cos t + \sin t)\Big|_{2\pi}^{0}$$

$$= -\frac{a^2}{2}(-4\pi - 2\pi)$$

$$= 3\pi a^2$$

(3) $\vec{r}'(t) = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$$\vec{r}''(t) = x''\vec{i} + y''\vec{j}$$

$$\kappa = \frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|x'y''-x''y'|}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = a(t-\sin t) \quad \Rightarrow x' = \frac{dx}{dt} = a(1-\cos t) \quad \Rightarrow x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = a\sin t$$

$$y = a(1-\cos t) \quad \Rightarrow y' = \frac{dy}{dt} = a\sin t \quad \Rightarrow y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = a\cos t$$

$$\kappa = \frac{|x'y''-x''y'|}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|a(1-\cos t)\cdot a\cos t - a\sin t\cdot a\sin t|}{[a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2(1-\cos t)}{a^3(2-2\cos t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\,a(1-\cos t)^{\frac{1}{2}}}$$

將 $t=\pi$ 代入，可得 $\kappa = \dfrac{1}{4a}$

6. 已知場 $\vec{F}=3y\vec{i}-xz\vec{j}+yz^2\vec{k}$ ，曲面 S_1 為 $z=x^2+y^2, z<1$ 之部分與 $S_2: z=1$ ，Γ 為 S_1 、S_2 之交線，試問:

(1) 試畫出 S_1 之圖形，並標出 S_1 、S_2 與 Γ 。 (4%)

(2) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。 (2%)

(3) S_1 上的單位法向量 $\vec{n}=?$ (4%)

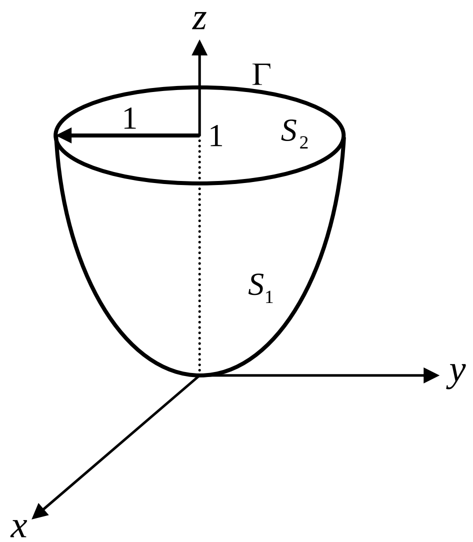
(4) $\oiint (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS=?$ (4%)

(5) $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=?$ (4%)

(6) $\iint_{S_1}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ (4%)

(7) $\iint_{S_2}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ (4%)

(1)



(2) $\because\quad \nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3y & -xz & yz^2\end{vmatrix}=(x+z^2)\vec{i}-(z+3)\vec{k}\neq 0$

$\therefore$ $\vec{F}$ 不為保守場

(3) 令 $\phi=x^2+y^2-z$

$$\vec{n}=\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}=\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

(4) Gauss 散度定理: $\oiint \vec{P}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint \nabla\cdot\vec{P}\,dV$

令 $\vec{P}=\nabla\times\vec{F} \quad \Rightarrow \nabla\cdot\vec{P}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=0$ (∵任何旋轉場不具有發散性)

因此 $\oiint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS=0$

(5) 由線積分 $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\Gamma 3y\,dx-xz\,dy+yz^2\,dz$

令 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $z=1$

$\Rightarrow dx=-\sin\theta\,d\theta$, $dy=\cos\theta\,d\theta$, $dz=0$

$$\therefore \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\Gamma 3y\,dx-xz\,dy+yz^2\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}[3\sin\theta\cdot(-\sin\theta)-\cos\theta\cdot\cos\theta]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(-3\sin^2\theta-\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=-4\pi$$

(6) $\iint_{S_1}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=-\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=4\pi$

(7) $\iint_{S_2}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=-4\pi$