國立臺灣海洋大學河海工程學系 2026 工程數學(二) 第一次大考

系級：________　學號：________　姓名：________

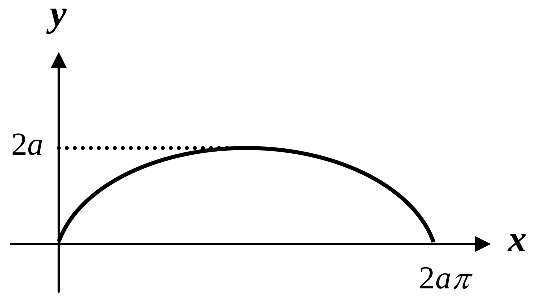
1. 有一平面過 A、B、C 三點，其座標分別為 $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ 與 $(1,2,3)$ ，試問:
   (1) 此平面方程式為何? (3%)
   (2) A、B、C 三點所建構之三角形各頂點的角度為何? (6%)
   (3) 此平面的單位法線向量為何? (3%)
   (4) ΔABC 的面積為何? (3%)
   (5) 平面外一點 $P(1,1,3)$ 到此平面之最短距離 d 為何? (3%)
   (6) A 、B 、C 與 P 點所構成之四面體體積 V 為何? (3%)

2. 給一純量函數 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{z}\sqrt{6x^2+8y^2}$ 與一橢球曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$，試回答下列問題:
   (1) 橢球曲面上點 $P(1,1,1)$ 處的向外單位法向量。(5%)
   (2) 純量函數 f 在點 P 處沿向外法線方向的方向導數。(5%)

3. 已知 $f=xz-yz$, $\vec{A}=y^2\vec{i}+(y^2-x^2)\vec{j}+2z^2\vec{k}$ ，試求:
   (1) $\nabla^2(xzf)$ (2) $\nabla\cdot(\nabla f)$ (3) $\nabla\times\vec{A}$ (4) $\nabla(\nabla\cdot\vec{A})$ (5) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})$ (15%)

4. (1) 若向量場 $\vec{F}=Ax\ln z\,\vec{i}+By^2z\,\vec{j}+(\dfrac{x^2}{z}+y^3)\vec{k}$ 為保守場，則實數 A、B 分別為何? (5%)
   (2) 令 C 為由 $(1,1,1)$ 到 $(2,2,1)$ 的線段，試求 $\int_C 2x\ln z\,dx+2y^2zdy+(\dfrac{x^2}{z}+y^3)dz$ 之值。 (5%)

5. 給一擺線如下圖。$\vec{r}(t)=a(t-\sin t)\vec{i}+a(1-\cos t)\vec{j}$ ，其中 $a>0$ 且 $0\le t\le 2\pi$
   (1) 試計算擺線之弧長。 (6%)
   (2) 給定 $P=-y$ 與 $Q=x$ ，試由格林定理來求擺線與 x 軸所交之面積。 (6%)
   (3) 試求在 $t=\pi$ 之曲率 κ 。 (6%)



6. 已知場 $\vec{F} = 3y\,\vec{i} - xz\,\vec{j} + yz^2\vec{k}$ ，曲面 S_1 為 $z = x^2 + y^2, z < 1$ 之部分與 $S_2 : z = 1$ ，Γ 為 S_1 、 S_2 之交線，試問:

(1) 試畫出 S_1 之圖形，並標出 S_1 、 S_2 與 Γ 。 (4%)

(2) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。 (2%)

(3) S_1 上的單位法向量 $\vec{n} = ?$ (4%)

(4) $\oiint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = ?$ (4%)

(5) $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$ (4%)

(6) $\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ (4%)

(7) $\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ (4%)

Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$ **(3D)** $\iint \nabla \cdot \vec{F}\, dA = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ **(2D)**

格林定理: $\int P\,dx + Q\,dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

Stokes 旋度定理: $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

曲率: $\kappa = \dfrac{|y''(x)|}{[1 + (y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率:** $\tau = \left| \dfrac{d(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}{ds} \right|$

二倍角公式: $\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$**,** $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$

四面體體積: $V = \frac{1}{3} A_0 h$**，圓錐體積體積:** $V = \frac{1}{3} A_0 h$ **(** A_0**: 底面積;** h**: 高)**

球座標: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$

微小球面面積 $dA = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ **(**θ**:俯仰角;** ϕ**:水平角)**

Lagrange 恆等式: $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(\vec{A} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2}$