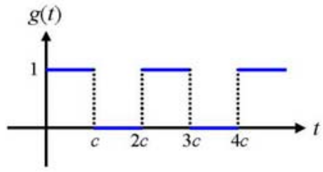
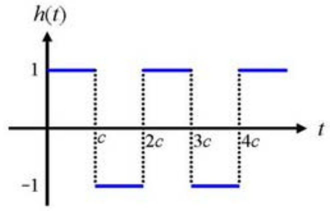
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2026 工程數學(二) 期末考參考解答

系級：＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 如下圖，函數 $g(t)=\begin{cases}1, & 0<t<c\\ 0, & c<t<2c\end{cases}$ 且 $g(t+2c)=g(t)$ 對所有 t 成立，c 為一常數，且其拉普拉斯轉換為 $G(s)=\dfrac{1}{s(1+e^{-cs})}$，試問函數 $h(t)=\begin{cases}1, & 0<t<c\\ -1, & c<t<2c\end{cases}$ 且 $h(t+2c)=h(t)$ 之拉普拉斯轉換 $H(s)$ 為何? (10%)





2. 試求下列函數的拉普拉斯轉換: (30%)
   (1) $f(t)=(t-1)^3$　(2) $f(t)=\cos^2 2t$　(3) $f(t)=\cosh 2t\cdot\sinh 2t$
   (4) $f(t)=t^3\sinh t$　(5) $f(t)=\cos(2t+\dfrac{\pi}{4})$　(6) $f(t)=te^t\sin t$

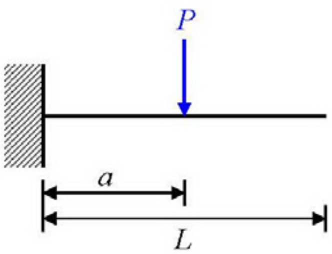
3. 給一函數 $f(t)=\left|\sin at\right|$，其中 a 為一正實數且 $t>0$，試繪出函數 $f(t)$ 之圖形並求其拉普拉斯轉換。 (10%)

4. 試求下列函數的拉普拉斯逆轉換: (20%)
   (1) $F(s)=\dfrac{3}{s^2-s-2}$　(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^2-4s+5}$　(3) $F(s)=\ln\dfrac{1}{s^2-4}$
   (4) $F(s)=\tan^{-1}s$

5. 已知 $G(s)=\dfrac{3}{s}-\dfrac{4e^{-s}}{s^2}+\dfrac{4e^{-3s}}{s^2}$，試求其拉普拉斯逆轉換 $g(t)$ 並繪其圖形。(10%)

6. 試用拉普拉斯轉換法求解
   (1) $ty''-ty'+y=1$ 且 $y(0)=y'(0)=1$。(10%)
   (2) $\dfrac{dx}{dt}+2x+\int_0^t x(\tau)d\tau=1-u(t-1)$ 其中 $x(0)=0$，$u(t)$ 為單位步階函數。(10%)

7. 如下圖所示，給一長度為 L 的懸臂梁，其在梁上 $x=a$ 處有一集中負載 P，可知其控制方程式為 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=P\cdot\delta(x-a)$ 且 $0<x<L$，此問題之邊界條件為 $y(0)=y'(0)=y''(L)=y'''(L)=0$，試以拉普拉斯轉換法求其位移方程式。(10%)



8. 試使用拉普拉斯轉換求解下述聯立微分方程組 (10%)

$$\begin{cases} x'(t)-x(t)+2y(t)=0 \\ 3x(t)+y'(t)-2y(t)=0 \end{cases} \quad 且 \quad x(0)=1, \quad y(0)=0$$

9. 針對工數這門課的教學方式與如何學好這門課有何感想與建議? (10%)

[參考公式]

拉普拉斯轉換： $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt$

第一平移定理: $\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$

第二平移定理: $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]=e^{-as}F(s)$

尺度變換: $\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

微分函數的拉普拉斯轉換: $\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

$\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

積分函數的拉普拉斯轉換: $\mathcal{L}[\int_0^t f(x)\,dx]=\frac{F(s)}{s}$, $\mathcal{L}[\int_0^t\int_0^{\tau} f(x)\,dx\,d\tau]=\frac{F(s)}{s^2}$

拉普拉斯轉換的微分: $\mathcal{L}[tf(t)]=(-1)\frac{d}{ds}F(s)$, $\mathcal{L}[t^2f(t)]=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s)$

拉普拉斯轉換的積分: $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^{\infty}F(\tau)\,d\tau$, $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t^2}]=\int_s^{\infty}\int_{\gamma}^{\infty}F(\tau)\,d\tau\,d\gamma$

摺積: $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$

$\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=F(s)\cdot G(s)$

雙曲函數: $\cosh at=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$, $\sinh at=\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$

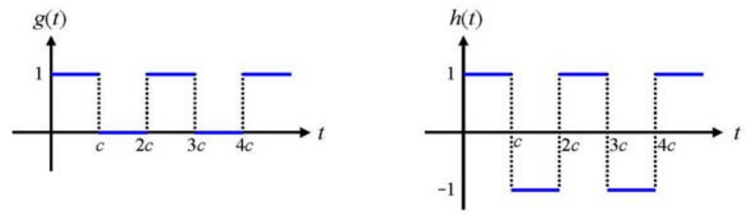
初值定理: $\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$

終值定理: $\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$

一階線性 ODE: $y'(x)+p(x)y(x)=q(x)$ **其積分因子為** $\mu=e^{\int p(x)dx}$

參考解答：

1. 如下圖，函數 $g(t)=\begin{cases}1, & 0<t<c\\ 0, & c<t<2c\end{cases}$ 且 $g(t+2c)=g(t)$ 對所有 t 成立，c 為一常數，且其拉普拉斯轉換為 $G(s)=\dfrac{1}{s(1+e^{-cs})}$，試問函數 $h(t)=\begin{cases}1, & 0<t<c\\ -1, & c<t<2c\end{cases}$ 且 $h(t+2c)=h(t)$ 之拉普拉斯轉換 $H(s)$ 為何? (10%)



$h(t)=2g(t)-1$ 又 $G(s)=\dfrac{1}{s(1+e^{-cs})}$

$$\therefore H(s)=\mathcal{L}[h(t)]=\mathcal{L}[2g(t)-1]=2H(s)-\frac{1}{s}=\frac{2}{s(1+e^{-cs})}-\frac{1}{s}=\frac{1}{s}(\frac{1-e^{-cs}}{1+e^{-cs}})$$

2. 試求下列 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換為何? (30%)

(1) $f(t)=(t-1)^3$ (2) $f(t)=\cos^2 2t$ (3) $f(t)=\cosh 2t\cdot\sinh 2t$

(4) $f(t)=t^3\sinh t$ (5) $f(t)=\cos(2t+\dfrac{\pi}{4})$ (6) $f(t)=te^t\sin t$

(1) $\mathcal{L}[(t-1)^3]=\mathcal{L}[t^3-3t^2+3t-1)]=\dfrac{6}{s^4}-\dfrac{6}{s^3}+\dfrac{3}{s^2}-\dfrac{1}{s}=\dfrac{6-6s+3s^2-s^3}{s^4}$

(2) $\mathcal{L}[\cos^2 2t]=\mathcal{L}[\dfrac{1+\cos 4t}{2}]=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{s}+\dfrac{s}{s^2+16})=\dfrac{s^2+8}{s(s^2+16)}$

(3) $\mathcal{L}[\cosh 2t\cdot\sinh 2t]=\mathcal{L}[\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\cdot\dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}]=\dfrac{1}{4}\mathcal{L}[e^{4t}-e^{-4t}]=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{s-4}-\dfrac{1}{s+4})$

$$=\frac{2}{s^2-16}$$

(4) $\mathcal{L}[t^3\sinh t]=\dfrac{1}{2}\mathcal{L}[t^3\cdot(e^t-e^{-t})]=\dfrac{3}{(s-1)^4}-\dfrac{3}{(s+1)^4}=\dfrac{24s(s^2+1)}{(s^2-1)^4}$

(5) $\mathcal{L}[\cos(2t+\dfrac{\pi}{4})]=\mathcal{L}[\cos 2t\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin 2t\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}]=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\dfrac{s}{s^2+4}-\dfrac{4}{s^2+4})$

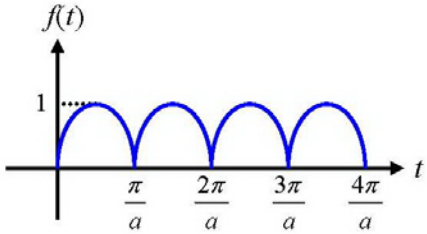
$$=\frac{s-2}{\sqrt{2}(s^2+4)}$$

(6) $\mathcal{L}[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$

$$\mathcal{L}[e^t\sin t]=\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$\mathcal{L}[te^t\sin t]=-\frac{d}{ds}[\frac{1}{(s-1)^2+1}]=\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}=\frac{2(s-1)}{(s^2-2s+2)^2}$$

3. 給一函數 $f(t)=|\sin at|$，其中 a 為一正實數且 $t>0$，試繪出函數 $f(t)$ 之圖形並求其拉普拉斯轉換。 (10%)



由圖可看出其週期為 $T=\dfrac{\pi}{a}$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-\frac{s\pi}{a}}}\int_0^{\frac{\pi}{a}}\sin at\cdot e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\frac{s\pi}{a}}}\cdot\frac{s^2}{s^2+a^2}\left(-\frac{1}{s}\sin at\cdot e^{-st}-\frac{a}{s^2}\cos at\cdot e^{-st}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{a}}=\frac{a}{s^2+a^2}\cdot\frac{1+e^{-\frac{s\pi}{a}}}{1-e^{-\frac{s\pi}{a}}}$$

4. 試求下列函數的拉普拉斯逆轉換: (20%)

(1) $F(s)=\dfrac{3}{s^2-s-2}$ (2) $F(s)=\dfrac{1}{s^2-4s+5}$ (3) $F(s)=\ln\dfrac{1}{s^2-4}$

(4) $F(s)=\tan^{-1}s$

(1) $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{3}{s^2-s-2}]=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{1}{s+1}]=e^{2t}-e^{-t}$

(2) $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{s^2-4s+5}]=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{(s-2)^2+1}]=e^{2t}\cdot\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{s^2+1}]=e^{2t}\sin t$

(3) $\mathcal{L}^{-1}[\ln\dfrac{1}{s^2-4}]=-\mathcal{L}^{-1}[\ln(s+2)+\ln(s-2)]$

令 $\mathcal{L}[h(t)]=\ln(s+2)\ \Rightarrow \mathcal{L}[t\cdot h(t)]=-\dfrac{d}{ds}[\ln(s+2)]=-\dfrac{1}{s+2}$

$\Rightarrow t\cdot h(t)=\mathcal{L}^{-1}[-\dfrac{1}{s+2}]=-e^{-2t}$

$\Rightarrow h(t)=-\dfrac{1}{t}e^{-2t}$

同理可得 $\ln(s-2)=-\dfrac{1}{t}e^{2t}$

$\therefore \mathcal{L}^{-1}[\ln\dfrac{1}{s^2-4}]=-(-\dfrac{1}{t}e^{-2t}-\dfrac{1}{t}e^{2t})=\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}}{t}=\dfrac{2}{t}\cosh 2t$

(4) $\int \frac{1}{1+u^2}du = \tan^{-1}u$

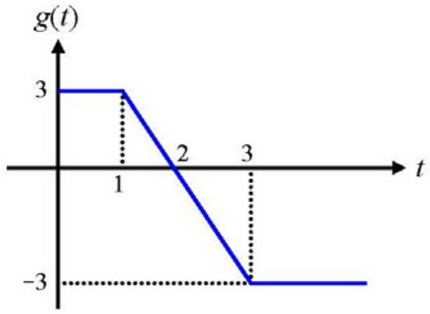
$$\mathcal{L}[f(t)] = \tan^{-1}s \quad \Rightarrow \mathcal{L}[t\,f(t)] = -\frac{d(\tan^{-1}s)}{ds} = -\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow t\,f(t) = \mathcal{L}^{-1}[-\frac{1}{s^2+1}] = -\sin t$$

$$\Rightarrow f(t) = -\frac{1}{t}\sin t$$

5. 已知 $G(s) = \frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}$，試求其拉普拉斯逆轉換 $g(t)$ 並繪其圖形。

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}] = 3 - 4(t-1)H(t-1) + 4(t-3)H(t-3)$$



6. 試用拉普拉斯轉換法求解

(1) $ty'' - ty' + y = 1$ 且 $y(0) = y'(0) = 1$。(10%)

(2) $\dfrac{dx}{dt} + 2x + \int_0^t x(\tau)d\tau = 1 - u(t-1)$ 其中 $x(0) = 0$，$u(t)$ 為單位步階函數。(10%)

(1) $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$

$\mathcal{L}[ty'' - ty' + y] = \mathcal{L}[1]$

$\Rightarrow -\dfrac{d}{ds}[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + \dfrac{d}{ds}[sY(s) - y(0)] + Y(s) = \dfrac{1}{s}$

$\Rightarrow -s(s-1)Y'(s) - 2(s-1)Y(s) = -\dfrac{s-1}{s}$

$\Rightarrow sY'(s) + 2Y(s) = \dfrac{1}{s}$

$\Rightarrow s^2Y'(s) + 2sY(s) = 1$

$\Rightarrow \dfrac{d}{ds}[s^2Y(s)] = 1$

$\Rightarrow Y(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{c}{s^2}$

$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 + ct$

又 $y'(0) = 1 \quad \Rightarrow c = 1$

$\therefore \quad y(t) = 1 + t$

(2) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$

$\dfrac{dx}{dt} + 2x + \int_0^t x(\tau)d\tau = 1 - u(t-1)$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dt} + 2x + 1 * x = 1 - u(t-1)$

$\Rightarrow \mathcal{L}[\dfrac{dx}{dt} + 2x + 1 * x] = \mathcal{L}[1 - u(t-1)]$

$\Rightarrow sX(s) + 2X(s) + \dfrac{1}{s}X(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s}$

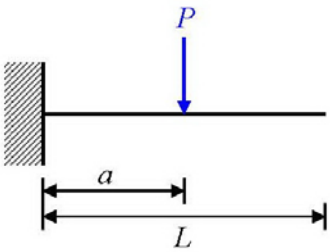
$\Rightarrow (s^2 + 2s + 1)X(s) = 1 - e^{-s}$

$\Rightarrow X(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}(1 - e^{-s})$

又 $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{(s+1)^2}] = te^{-t}$

$\therefore \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = te^{-t} - (t-1)e^{-(t-1)}u(t-1)$

7. 如下圖所示，給一長度為 L 的懸臂梁，其在梁上 $x=a$ 處有一集中負載 P，可知其控制方程式為 $EI\dfrac{d^4y}{dx^4}=P\cdot\delta(x-a)$ 且 $0<x<L$，此問題之邊界條件為 $y(0)=y'(0)=y''(L)=y'''(L)=0$，試以拉普拉斯轉換法求其位移方程式。(10%)



$$\mathcal{L}[y(x)]=Y(s)$$

$$\mathcal{L}[EI\frac{d^4y}{dx^4}]=\mathcal{L}[P\cdot\delta(x-a)]$$

$$\Rightarrow EI[s^4Y(s)-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)]=Pe^{-as}$$

$$\Rightarrow s^4Y(s)=\frac{P}{EI}e^{-as}+C_1s+C_2 \qquad （令\ y''(0)=C_1，\ y'''(0)=C_2）$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{P}{EI}\frac{e^{-as}}{s^4}+C_1\frac{1}{s^3}+C_2\frac{1}{s^4}$$

$$\Rightarrow y(x)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{P}{6EI}(x-a)^3u(x-a)+\frac{C_1}{2}x^2+\frac{C_2}{6}x^3$$

當 $x>a$ 時可知 $y(x)=\dfrac{P}{6EI}(x-a)^3+\dfrac{C_1}{2}x^2+\dfrac{C_2}{6}x^3$

$$\Rightarrow y'(x)=\frac{P}{2EI}(x-a)^2+C_1x+\frac{C_2}{2}x^2$$

$$\Rightarrow y''(x)=\frac{P}{EI}(x-a)+C_1+C_2x$$

$$\Rightarrow y'''(x)=\frac{P}{EI}+C_2$$

由邊界條件:

$$y'''(L)=0 \quad \Rightarrow C_2=-\frac{P}{EI}$$

$$y''(L)=0 \quad \Rightarrow \frac{P}{EI}(L-a)+C_1+C_2L=0 \quad \Rightarrow C_1=\frac{Pa}{EI}$$

$$\therefore\ y(x)=\frac{P}{6EI}(x-a)^3u(x-a)+\frac{Pa}{2EI}x^2-\frac{P}{6EI}x^3$$

8. 試使用拉普拉斯轉換求解下述聯立微分方程組 (10%)

$$\begin{cases} x'(t) - x(t) + 2y(t) = 0 \\ 3x(t) + y'(t) - 2y(t) = 0 \end{cases} \quad 且 \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

取拉普拉斯轉換後可得

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) - X(s) + 2Y(s) = 0 \\ 3X(s) + sY(s) - y(0) - 2Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s-1)X(s) + 2Y(s) = 1 \\ 3X(s) + (s-2)Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{s-2}{(s+1)(s-4)}, \quad Y(s) = \frac{-3}{(s+1)(s-4)}$$

$$\therefore \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{5}\frac{1}{s+1} + \frac{2}{5}\frac{1}{s-4}] = \frac{3}{5}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{4t}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{5}\frac{1}{s+1} - \frac{3}{5}\frac{1}{s-4}] = \frac{3}{5}e^{-t} - \frac{3}{5}e^{4t}$$