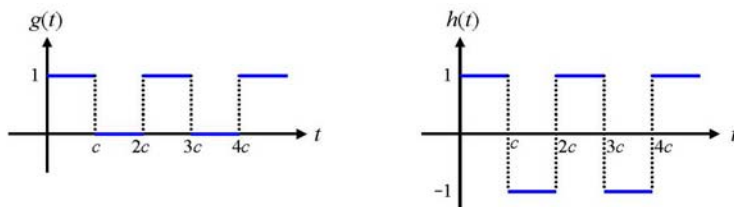
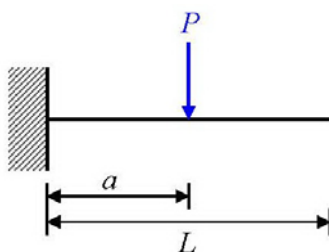


系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 如下圖，函數 $g(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < c \\ 0, & c < t < 2c \end{cases}$ 且 $g(t+2c) = g(t)$ 對所有 t 成立， c 為一常數，且其拉普拉斯轉換為 $G(s) = \frac{1}{s(1+e^{-cs})}$ ，試問函數 $h(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < c \\ -1, & c < t < 2c \end{cases}$ 且 $h(t+2c) = h(t)$ 之拉普拉斯轉換 $H(s)$ 為何？(10%)



2. 試求下列函數的拉普拉斯轉換：(30%)
- (1) $f(t) = (t-1)^3$ (2) $f(t) = \cos^2 2t$ (3) $f(t) = \cosh 2t \cdot \sinh 2t$
- (4) $f(t) = t^3 \sinh t$ (5) $f(t) = \cos(2t + \frac{\pi}{4})$ (6) $f(t) = te^t \sin t$
3. 給一函數 $f(t) = |\sin at|$ ，其中 a 為一正實數且 $t > 0$ ，試繪出函數 $f(t)$ 之圖形並求其拉普拉斯轉換。(10%)
4. 試求下列函數的拉普拉斯逆轉換：(20%)
- (1) $F(s) = \frac{3}{s^2 - s - 2}$ (2) $F(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$ (3) $F(s) = \ln \frac{1}{s^2 - 4}$
- (4) $F(s) = \tan^{-1} s$
5. 已知 $G(s) = \frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}$ ，試求其拉普拉斯逆轉換 $g(t)$ 並繪其圖形。(10%)
6. 試用拉普拉斯轉換法求解
- (1) $ty'' - ty' + y = 1$ 且 $y(0) = y'(0) = 1$ 。(10%)
- (2) $\frac{dx}{dt} + 2x + \int_0^t x(\tau) d\tau = 1 - u(t-1)$ 其中 $x(0) = 0$ ， $u(t)$ 為單位步階函數。(10%)
7. 如下圖所示，給一長度為 L 的懸臂梁，其在梁上 $x=a$ 處有一集中負載 P ，可知其控制方程式為 $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = P \cdot \delta(x-a)$ 且 $0 < x < L$ ，此問題之邊界條件為 $y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$ ，試以拉普拉斯轉換法求其位移方程式。(10%)



8. 試使用拉普拉斯轉換求解下述聯立微分方程組 (10%)

$$\begin{cases} x'(t) - x(t) + 2y(t) = 0 \\ 3x(t) + y'(t) - 2y(t) = 0 \end{cases} \quad \text{且 } x(0) = 1, y(0) = 0$$

9. 針對工數這門課的教學方式與如何學好這門課有何感想與建議? (10%)

[參考公式]

拉普拉斯轉換: $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$

第一平移定理: $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$

第二平移定理: $\mathcal{L}[f(t - a)u(t - a)] = e^{-as} F(s)$

尺度變換: $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

微分函數的拉普拉斯轉換: $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

積分函數的拉普拉斯轉換: $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right] = \frac{F(s)}{s}$, $\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^{\tau} f(x) dx d\tau\right] = \frac{F(s)}{s^2}$

拉普拉斯轉換的微分: $\mathcal{L}[tf(t)] = (-1) \frac{d}{ds} F(s)$, $\mathcal{L}[t^2 f(t)] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$

拉普拉斯轉換的積分: $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(\tau) d\tau$, $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^2}\right] = \int_s^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} F(\tau) d\tau d\gamma$

摺積: $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

雙曲函數: $\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$, $\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$

初值定理: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

終值定理: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

一階線性 ODE: $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$ 其積分因子為 $\mu = e^{\int p(x) dx}$