

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 試解: $\frac{dx}{dt} = Ax + z$ 其中 $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $z = \begin{Bmatrix} 5e^t \\ -6e^t \end{Bmatrix}$ 。

2. 試解: $\begin{cases} x_1' = -4x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + 5x_2 - x_3 \\ x_3' = x_2 - 3x_3 \end{cases}$

3. 已知 $13x_1^2 - 10x_1x_2 + 13x_2^2 = 288$ ，試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2]$ ，試問此方程為何種圓錐曲線？

4. 試求函數 $f(x, y) = 4x^2 + 3xy + y^2 - 2x + y$ 之相對極值。

參考解答：

1. $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ or } 2$

當 $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -5 \end{Bmatrix}$

$\therefore A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}^{-1}$

令 $x = Sy \Rightarrow S \frac{dy}{dt} = ASy + z \Rightarrow \frac{dy}{dt} = S^{-1}ASy + S^{-1}z$

$\therefore \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 5e^t \\ -6e^t \end{Bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + e^t \\ \dot{y}_2 = 2y_2 + e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 e^t + t e^t \\ y_2 = c_2 e^{2t} - e^t \end{cases}$

$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 + 4y_2 \\ -y_1 - 5y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 e^t + 4c_2 e^{2t} + te^t - 4e^t \\ -c_1 e^t - 5c_2 e^{2t} - te^t + 5e^t \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} (c_1 - 4)e^t + 4c_2 e^{2t} + te^t \\ (-c_1 + 5)e^t - 5c_2 e^{2t} - te^t \end{Bmatrix}$$

2. $\dot{x} = Ax$ 其中 $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -3, -4, 5$$

$$\text{當 } \lambda = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{當 } \lambda = -4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x^2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{當 } \lambda = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x^3 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{令 } x = Sy \Rightarrow S \frac{dy}{dt} = ASy \Rightarrow \frac{dy}{dt} = S^{-1}ASy = Dy$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 e^{-3t} \\ C_2 e^{-4t} \\ C_3 e^{5t} \end{Bmatrix}$$

$$x = Sy \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 e^{-3t} \\ C_2 e^{-4t} \\ C_3 e^{5t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 e^{-3t} + 10C_2 e^{-4t} + C_3 e^{5t} \\ -C_2 e^{-4t} + 8C_3 e^{5t} \\ C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t} + C_3 e^{5t} \end{Bmatrix}$$

$$3. \quad 13x_1^2 - 10x_1x_2 + 13x_2^2 = 288 \Rightarrow \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 288 \quad \text{其中 } \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{由 } |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 13 - \lambda & -5 \\ -5 & 13 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 8 \text{ or } 18$$

$$\text{當 } \lambda_1 = 8 \text{ 時, } \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{當 } \lambda_2 = 18 \text{ 時, } \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore s = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow s^{-1} = s^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } y = s^T x$$

$$x^T \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} x = 288 \Rightarrow x^T s \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} s^T x = 288$$

$$\Rightarrow y^T \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} y = 288$$

$$\Rightarrow 8y_1^2 + 18y_2^2 = 288$$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{6^2} + \frac{y_2^2}{4^2} = 1 \quad \text{此為橢圓線}$$

$$4. \quad \begin{cases} f_x = 8x + 3y - 2 = 0 \\ f_y = 3x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 8 - \lambda & 3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 5 \pm 3\sqrt{2}$$

由於 λ 恆大於零

故有相對極小值 $f(1, -2) = -2$