國立臺灣海洋大學河海工程學系 2025 工程數學(一) 課後練習 14 參考解答

系級：________　　學號：________　　姓名：________

1. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}$

   (1) 試求 **A** 之特徵值、特徵向量並求 **A** 的 Jordan form。

   (2) 試求 $e^{\mathbf{A}t}$ 。

2. 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 4\end{bmatrix}$，求 **P** 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ 為 Jordan form。

3. 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ -3 & -1 & -2\\ 7 & 5 & 6\end{bmatrix}$，試問:

   (1) A 的特徵方程為何?

   (2) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ ，則 $p=?$, $q=?$, $r=?$ $A^{-1}=?$

   (3) 試以 Cayley-Hamilton 法計算 e^{A} 。

參考解答:

1. (1) $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ -2 & -2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -\lambda^3=0 \Rightarrow \lambda=0,0,0$

當 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 時，可得 $\mathbf{x}^1=\begin{Bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{Bmatrix}$, $\mathbf{x}^2=\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{Bmatrix}$

$\because$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 只對應到 2 個特徵向量

$\therefore$ 需計算廣義特徵向量求 $\mathbf{x}^3$

$\because$ 由 $(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\mathbf{x}^3=\mathbf{x}^2 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{Bmatrix}$ (矛盾)

$\therefore$ 調整 $\mathbf{x}^2$

令 $\mathbf{x}^2 = c_1\begin{Bmatrix}-1\\1\\0\end{Bmatrix} + c_2\begin{Bmatrix}-1\\0\\1\end{Bmatrix}$ 取 $c_1 = 1$，$c_2 = 2$ 可得 $\mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix}1\\1\\-2\end{Bmatrix}$

由 $(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\-2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\1\\-2\end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

令 $x_2 = s$，$x_3 = t \quad \Rightarrow x_1 = 1 - s - t$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^3 = \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1-s-t\\s\\t\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-1\\1\\0\end{Bmatrix}s + \begin{Bmatrix}-1\\0\\1\end{Bmatrix}t$$

取 $\mathbf{x}^3 = \begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}$

可得 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}^1 & \mathbf{x}^2 & \mathbf{x}^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & -2 & 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & -\frac{1}{2}\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(2) $\mathbf{AP} = \mathbf{PJ} \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$

$$f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(\lambda) & 0 & 0\\0 & f(\lambda) & f'(\lambda)\\0 & 0 & f(\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & -\frac{1}{2}\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0 & 0\\0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\0 & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & -\frac{1}{2}\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}t+1 & t & t\\ t & t+1 & t\\ -2t & -2t & -2t+1\end{bmatrix}$$

2. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}0-\lambda & -3 & 1 & 2\\ -2 & 1-\lambda & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1-\lambda & 2\\ -2 & -3 & 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2-4\lambda+4)=0$

$$\Rightarrow \lambda = 0, 0, 2, 2$$

當 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 時，$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{x}=\{0\} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & -3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix}$$

當 $\lambda_3=\lambda_4=2$ 時，$(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\mathbf{x}=\{0\} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}-2 & -3 & 1 & 2\\ -2 & -1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -3 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^3=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\1\end{Bmatrix},\ \mathbf{x}^4=\begin{Bmatrix}0\\1\\1\\1\end{Bmatrix}$$

$\because$ $\lambda_1=\lambda_2=0$ 只對應到 1 個特徵向量

$\therefore$ 需計算廣義特徵向量求 $\mathbf{x}^2$

由 $(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\mathbf{x}^2=\mathbf{x}^1 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & -3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix}0\\-1\\-2\\0\end{Bmatrix} \quad \text{取} \quad \mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix}0\\-1\\-2\\0\end{Bmatrix}$$

可得 $\mathbf{P} = \left[\mathbf{x}^1\ \mathbf{x}^2\ \mathbf{x}^3\ \mathbf{x}^4\right] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\1 & -1 & 0 & 1\\1 & -2 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

$\mathbf{AP} = \mathbf{PJ} \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$ 或是 $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$

3. (1) $|A - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix}-\lambda & -1 & -1\\-3 & -1-\lambda & -2\\7 & 5 & 6-\lambda\end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$ (特徵方程式)

$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1, 2, 2$

(2) 由 Cayley-Hamilton 定理可知: $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0$

$$\Rightarrow A^{-1}(A^3 - 5A^2 + 8A - 4I) = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - 5A + 8I - 4A^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}A^2 - \frac{5}{4}A + 2I$$

$$\therefore \quad p = \frac{1}{4},\ \ q = -\frac{5}{4},\ \ r = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}A^2 - \frac{5}{4}A + 2I = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4 & -4 & -4\\-11 & -6 & -7\\27 & 18 & 19\end{bmatrix} - \frac{5}{4}\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\-3 & -1 & -2\\7 & 5 & 6\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\4 & 7 & 3\\-8 & -7 & -3\end{bmatrix}$$

(3) $e^A = Q(A)\cdot(A^3 - 5A^2 + 8A - 4I) + \overline{p}A^2 + \overline{q}A + \overline{r}I$

$\Rightarrow e^\lambda = Q(\lambda)\cdot(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4) + \overline{p}\lambda^2 + \overline{q}\lambda + \overline{r}$

代入 $\lambda = 1$ 可得 $e = \overline{p} + \overline{q} + \overline{r}$ … (1)

代入 $\lambda = 2$ 可得 $e^2 = 4\overline{p} + 2\overline{q} + \overline{r}$ … (2)

對 λ 微分 $\Rightarrow e^\lambda = 2\lambda\,\overline{p} + \overline{q}$

微分後代入 $\lambda = 2$ 可得 $e^2 = 4\overline{p} + q$ … (3)

解聯立後可得　$p=e$，$q=e^2-4e$，$r=4e-e^2$

$e^A=\overline{p}A^2+\overline{q}A+\overline{r}I$

$$=e\begin{bmatrix}-4 & -4 & -4\\ -11 & -6 & -7\\ 27 & 18 & 19\end{bmatrix}+(e^2-4e)\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ -3 & -1 & -2\\ 7 & 5 & 6\end{bmatrix}+(4e-e^2)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-e^2 & -e^2 & e^2\\ e-3e^2 & 2e-2e^2 & e-2e^2\\ -e+7e^2 & -2e+5e^2 & -e+5e^2\end{bmatrix}$$