國立臺灣海洋大學河海工程學系 2025 工程數學(一) 課後練習 12 參考解答

系級：_______________ 學號：_____________ 姓名：____________

1. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&4\\1&4&-2\\1&4&2\\1&-1&0\end{bmatrix}$，請使用 Gram-Schmidt 法針對行向量空間求出一組單位正交基底向量。

2. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，試求各矩陣之特徵值與特徵向量。

3. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\7&0&1&0\\0&0&0&1\\-6&6&0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&3&6\\0&0&2&4\end{bmatrix}$，試求各矩陣之特徵值與特徵向量。

參考解答:

1. $u_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$

   $u_2=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T$

   $u_3=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T$

2. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}3-\lambda&0&-1\\0&1-\lambda&0\\-1&0&3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)=0 \Rightarrow \lambda=1,2,4$

   當 $\lambda_1=1$ 時，可得 $\mathbf{x}^1=\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}$

當 $\lambda_2 = 2$ 時，可得 $\mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_3 = 4$ 時，可得 $\mathbf{x}^3 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$

$$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \ \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0 \ \Rightarrow \lambda = 1, 1, -1$$

當 $\lambda_1 = -1$ 時，可得 $\mathbf{x}^1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 時，可得 $\mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

3. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \ \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & 6 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-3) = 0 \ \Rightarrow \lambda = 1, -1, -2, 3$$

當 $\lambda_1 = 1$ 時，可得 $\mathbf{x}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ -6 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_2 = -1$ 時，可得 $\mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \\ 6 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_3 = -2$ 時，可得 $\mathbf{x}^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 6 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_4 = 3$ 時，可得 $\mathbf{x}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{Bmatrix}$

$$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-7) = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 0, 1, 1, 7$$

當 $\lambda_1 = 0$ 時，可得 $\mathbf{x}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 時，可得 $\mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, $\mathbf{x}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_4 = 7$ 時，可得 $\mathbf{x}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$