國立臺灣海洋大學河海工程學系 2025 工程數學(二) 期末考

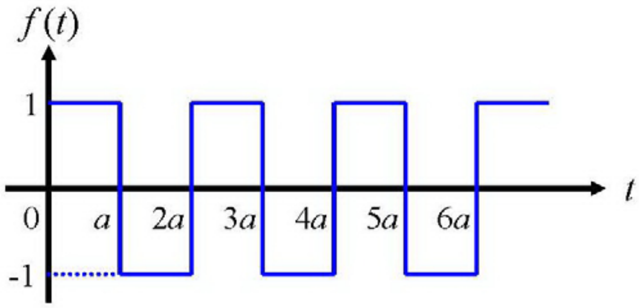
系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 試求下列 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換為何? (24%)

   (1) $f(t)=\sin^2 t$ (2) $f(t)=\sin^3 t$ (3) $f(t)=\sin 2t\cdot\cos t$

   (4) $f(t)=\sin 2t\cdot\cosh 2t$ (5) $f(t)=\sin(t+\dfrac{\pi}{3})$ (6) $f(t)=\dfrac{1}{t}\sin t$

2. 試求下圖函數的拉普拉斯轉換? (10%)



3. 試求下列 $F(s)$ 的拉普拉斯逆轉換為何? (24%)

   (1) $F(s)=e^{-3s}$ (2) $F(s)=\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$ (3) $F(s)=\dfrac{2s}{(s^2+9)^2}$

   (4) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4s+13}$ (5) $F(s)=\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$ (6) $F(s)=\ln\dfrac{s^2+4}{s^2}$

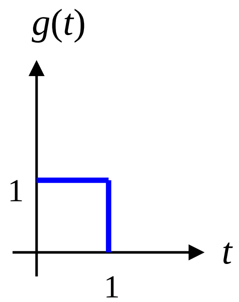
4. 單位步階函數(unit step function)定義為

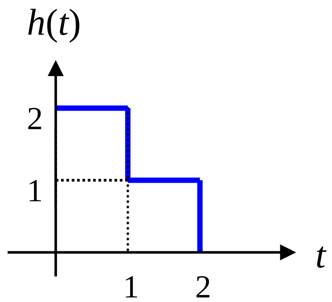
$$u(t-a)=\begin{cases}1, & t>a\\ 0, & t<a\end{cases}\quad \text{其中 } a \text{ 為常數}$$

   (1) 試將下圖函數 $g(t)$ 與 $h(t)$ 以單位步階函數表示。 (6%)

   (2) 試求 $g(t)$ 與 $h(t)$ 之拉普拉斯轉換 $G(s)$ 與 $H(s)$。 (6%)

   (3) 已知 $F(s)=G(s)\cdot H(s)$ 又 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$，試求 $f(t)$ 並繪其圖形。 (10%)





5. 試以 Laplace 轉換法求下述方程式

   (1) $t-2y(t)=\int_0^t (e^{\tau}-e^{-\tau})y(t-\tau)\,d\tau$ (10%)

   (2) $y'(t)+2e^t\int_0^t y(\tau)e^{-\tau}\,d\tau+y(t)=t^2e^t+2te^t$， $y(0)=-1$ (10%)

   (3) $y''(t)-4y'(t)+13y(t)=5\delta(t-4)$， $y(0)=0$， $y'(0)=0$ (10%)

6. 試使用拉普拉斯轉換求解下述聯立微分方程組 (10%)

$$\begin{cases} x''(t)+2x'(t)+\int_0^t y(\tau)\,d\tau=0 \\ 4x''(t)-x'(t)+y(t)=e^{-t} \end{cases} \quad 且 \quad x(0)=0, \quad x'(0)=1$$

7. 針對工數這門課的教學方式與如何學好這門課有何感想與建議? (10%)

[參考公式]

拉普拉斯轉換： $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$

第一平移定理： $\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$

第二平移定理： $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]=e^{-as}F(s)$

尺度變換： $\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

微分函數的拉普拉斯轉換： $\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

$\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

積分函數的拉普拉斯轉換： $\mathcal{L}[\int_0^t f(x)\,dx]=\frac{F(s)}{s}$， $\mathcal{L}[\int_0^t\int_0^\tau f(x)\,dx\,d\tau]=\frac{F(s)}{s^2}$

拉普拉斯轉換的微分： $\mathcal{L}[tf(t)]=(-1)\frac{d}{ds}F(s)$， $\mathcal{L}[t^2f(t)]=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s)$

拉普拉斯轉換的積分： $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^\infty F(\tau)\,d\tau$， $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t^2}]=\int_s^\infty\int_\gamma^\infty F(\tau)\,d\tau\,d\gamma$

摺積： $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$

$\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=F(s)\cdot G(s)$

雙曲函數： $\cosh at=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$， $\sinh at=\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$

初值定理： $\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$

終值定理： $\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$

一階線性 ODE: $y'(x)+p(x)y(x)=q(x)$ **其積分因子為** $\mu=e^{\int p(x)dx}$