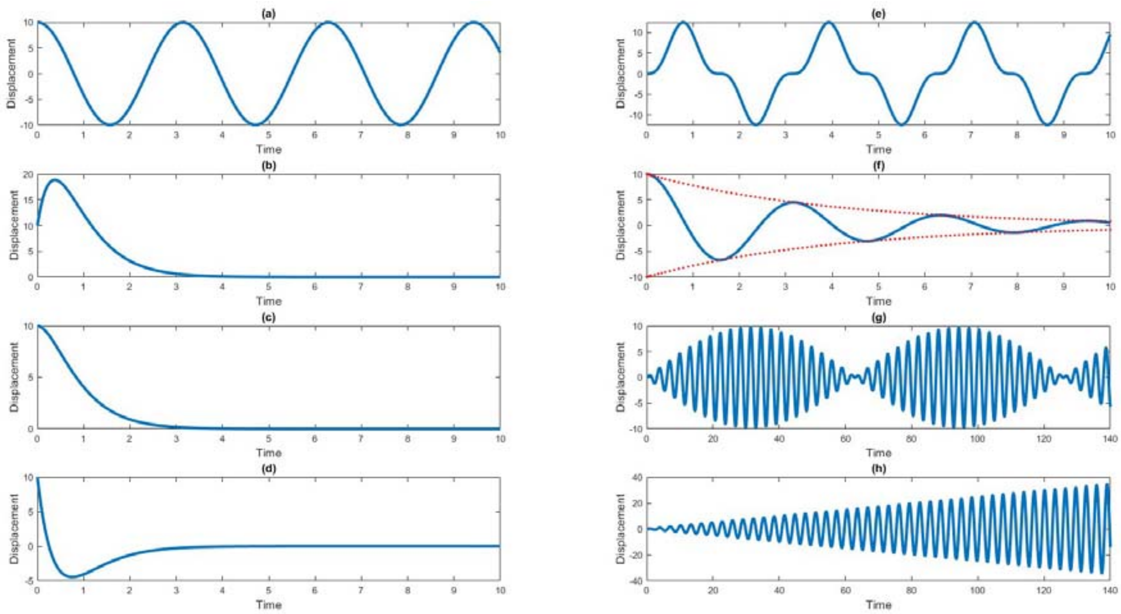
系級：______________　　學號：____________　　姓名：___________

1. 給一單自由度振動系統，其控制方程式為 $m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=f(t)$，已知相關參數如下表所示，試問其所對應之位移圖為何? (12%)

	系統參數	外力	初始條件	位移圖
(1)	$m=1$，$c=4$，$k=4$	$f(t)=0$	$y(0)=10$，$\dot{y}(0)=60$	
(2)	$m=1$，$c=4$，$k=4$	$f(t)=0$	$y(0)=10$，$\dot{y}(0)=-60$	
(3)	$m=1$，$c=0.5$，$k=4$	$f(t)=0$	$y(0)=10$，$\dot{y}(0)=0$	
(4)	$m=1$，$c=0$，$k=4$	$f(t)=100\sin 6t$	$y(0)=0$，$\dot{y}(0)=0$	
(5)	$m=1$，$c=0$，$k=4$	$f(t)=\cos 2t$	$y(0)=0$，$\dot{y}(0)=0$	
(6)	$m=1$，$c=0$，$k=4$	$f(t)=2\cos 2.1t$	$y(0)=0$，$\dot{y}(0)=0$	



2. 已知 x 、 $x+1$ 與 $x-e^{-x}$ 為下述線性微分方程的 3 個解

$$y''(x)+a(x)\cdot y'(x)+b(x)\cdot y(x)=f(x)$$

(1) 試求 $a(x)$ 、 $b(x)$ 與 $f(x)$ 為何? (9%)

(2) 試求此微分方程之通解。 (7%)

3. 給一非齊次線性微分方程如下:

$$x^2y''-5xy'+8y=2x\ln x+x^3,\ x>0$$

(1) 以變數變換，令 $t=\ln x$，則 $y(x)=Y(t)$，試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。 (6%)

(2) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t)=$? (4%)

(3) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t)=$? (4%)

(4) 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$。 (4%)

4. 試求下述微分方程之通解

(1) $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0$ (8%)

(2) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln|x|$ (8%)

(3) $xy'' + (x+2)y' + y = 0$ (8%)

(4) $(x-1)^2 y'' - 4(x-1)y' - 14y = x^3 - 3x^2 + 3x - 8$ (8%)

5. 已知微分方程式 $(x+2)y'' - (2x+5)y' + 2y = 0$

(1) 已知 $y_1 = e^{ax}$ 為上述 ODE 之一補解，試問 $a = ?$ (2%)

(2) 試問:另一補解為何? (8%)

6. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$，若給定質量塊 $m = 4$，阻尼係數 $c = 0$ 與彈簧常數 $k = 16$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0) = 0$ 與 $\dot{y}(0) = 0$，給一外力為 $f(t) = \sin \omega t$

試問:

(1) 當 $\omega = ?$，此系統會產生共振行為。 (4%)

(2) 當系統產生共振時，此時其解為何? (8%)

參考解答:

1. 給一單自由度振動系統，其控制方程式為 $m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=f(t)$，已知相關參數如下表所示，試問其所對應之位移圖為何? (12%)

	系統參數	外力	初始條件	位移圖
(1)	$m=1$，$c=4$，$k=4$	$f(t)=0$	$y(0)=10$，$\dot{y}(0)=60$	**(b)**
(2)	$m=1$，$c=4$，$k=4$	$f(t)=0$	$y(0)=10$，$\dot{y}(0)=-60$	**(d)**
(3)	$m=1$，$c=0.5$，$k=4$	$f(t)=0$	$y(0)=10$，$\dot{y}(0)=0$	**(f)**
(4)	$m=1$，$c=0$，$k=4$	$f(t)=100\sin 6t$	$y(0)=0$，$\dot{y}(0)=0$	**(e)**
(5)	$m=1$，$c=0$，$k=4$	$f(t)=\cos 2t$	$y(0)=0$，$\dot{y}(0)=0$	**(h)**
(6)	$m=1$，$c=0$，$k=4$	$f(t)=2\cos 2.1t$	$y(0)=0$，$\dot{y}(0)=0$	**(8)**

2. 已知 x 、 $x+1$ 與 $x-e^{-x}$ 為下述線性微分方程的 3 個解

$$y''(x)+a(x)\cdot y'(x)+b(x)\cdot y(x)=f(x)$$

(1) 試求 $a(x)$ 、 $b(x)$ 與 $f(x)$ 為何? (9%)

(2) 試求此微分方程之通解。 (7%)

(1) $\because$ x 、 $x+1$ 與 $x-e^{-x}$ 為微分方程的 3 個解

$\therefore$ 分別將 $y=x$ 、 $x+1$ 、 $x-e^{-x}$ 代入 ODE 可得

$0+a+bx=f$ ……(1)

$0+a+b(x+1)=f$ ……(2)

$-e^{-x}+a(1+e^{-x})+b(x-e^{-x})=f$ ……(3)

由(2)-(1)可得 $b=0$ 代回 (1) 可知 $a=f$ 代入 (3)

可得 $a=f=1$

所以可知此微分方程為 $y''(x)+y'(x)=1$

(2) $\because$ 此為常係數 ODE

$\therefore$ 令 $y=e^{\lambda x}$ 代入 ODE 可得

$\lambda^2+\lambda=0 \quad \Rightarrow \lambda=0 \text{ or } -1$

$$\Rightarrow y_h=c_3+c_2e^{-x}$$

使用參數變異法來求其特解

令其特解 $y_p(x)=u_1+u_2e^{-x}$ 代回 ODE 後可得

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & e^{-x}\\ 1 & -e^{-x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & e^{-x}\\ 0 & -e^{-x}\end{vmatrix}}=\frac{-e^{-x}}{-e^{-x}}=1 \quad \Rightarrow u_1=\int 1\,dx=x$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & e^{-x}\\ 0 & -e^{-x}\end{vmatrix}}=\frac{1}{-e^{-x}}=-e^{x} \quad \Rightarrow u_2=-\int e^{x}\,dx=-e^{x}$$

$\therefore \quad y_p(x)=u_1+u_2e^{-x}=x-1$

通解 $y=y_h(x)+y_p(x)=c_3+c_2e^{-x}+x-1=c_1+c_2e^{-x}+x$

3. **給一非齊次線性微分方程如下:**

$$x^2y'' - 5xy' + 8y = 2x\ln x + x^3,\ \ x > 0$$

(1) **以變數變換，令** $t = \ln x$ **，則** $y(x) = Y(t)$ **，試求轉換後以** $Y(t)$ **表示的微分方程式。** **(6%)**

(2) **試求轉換後微分方程的補解** $Y_h(t) = ?$ **(4%)**

(3) **試求轉換後微分方程的特解** $Y_p(t) = ?$ **(4%)**

(4) **試將** $Y(t)$ **轉換回** $y(x)$ **。** **(4%)**

(1) 令 $t = \ln x \ \Rightarrow x = e^t$

$\therefore\ y(x) = y(e^t) = Y(t)$

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{dY(t)}{dx} = \frac{dt}{dx}\cdot\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{x}Y'(t)$$

$$y''(x) = \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}Y'(t)) = -\frac{1}{x^2}Y'(t) + \frac{1}{x}\frac{dY'(t)}{dx} = -\frac{1}{x^2}Y'(t) + \frac{1}{x^2}Y''(t)$$

將 $y'(x)$ 與 $y''(x)$ 代回 ODE 可得

$$x^2[-\frac{1}{x^2}Y'(t) + \frac{1}{x^2}Y''(t)] - 5x\cdot\frac{1}{x}Y'(t) + 8Y(t) = 2te^t + e^{3t}$$

$$\Rightarrow Y''(t) - 6Y'(t) + 8Y(t) = 2te^t + e^{3t}$$

(2) $\because$ 此為常係數 ODE

$\therefore$ 令 $y = e^{\lambda x}$ 代入 ODE 可得

$$(\lambda^2 - 6\lambda + 8)e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2, 4$$

$$\therefore\ \ Y_h = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$$

(3) 由待定係數法，令 $Y_P = (At+B)e^t + Ce^{3t}$ 代回 ODE 可得

$$Y_P' = (At + A + B)e^t + 3Ce^{3t}$$

$$Y_P'' = (At + 2A + B)e^t + 9Ce^{3t}$$

$$[(At+2A+B)e^t + 9Ce^{3t}] - 6[(At+A+B)e^t + 3Ce^{3t}] + 8[(At+B)e^t + Ce^{3t}]$$

$$= 2te^t + e^{3t}$$

$$\Rightarrow 3Ate^{3t} + (-4A+3B)e^t - Ce^{3t} = 2te^t + e^{3t}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{3}, B = \frac{8}{9}, C = -1$$

$$Y_P = (\frac{2}{3}t + \frac{8}{9})e^t - e^{3t}$$

(4) $Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} + (\frac{2}{3}t + \frac{8}{9})e^t - e^{3t}$

$$\Rightarrow y(x) = C_1x^2 + C_2x^4 + \frac{2}{3}x\ln x + \frac{8}{9}x - x^3$$

4. 試求下述微分方程之通解

(1) $y^{(5)}-3y^{(4)}+3y'''-y''=0$ **(8%)**

(2) $y''+2y'+y=e^{-x}\ln|x|$ **(8%)**

(3) $xy''+(x+2)y'+y=0$ **(8%)**

(4) $(x-1)^2y''-4(x-1)y'-14y=x^3-3x^2+3x-8$ **(8%)**

(1) $y^{(5)}-3y^{(4)}+3y'''-y''=0$

令 $y=e^{\lambda x}$ 代入 ODE 可得

$$(\lambda^5-3\lambda^4+3\lambda^3-\lambda^2)e^{\lambda x}=0$$
$$\Rightarrow \lambda^2(\lambda-1)^3=0$$
$$\Rightarrow \lambda=0,0,1,1,1$$

$$\therefore\quad y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x+C_5x^2)e^x$$

(2) $y''+2y'+y=e^{-x}\ln|x|$

$\because$ 此為常係數 ODE

$\therefore$ 令 $y=e^{\lambda x}$ 代入 ODE 可得

$$(\lambda^2+2\lambda+1)e^{\lambda x}=0$$
$$\Rightarrow (\lambda+1)^2=0$$
$$\Rightarrow \lambda=-1,-1$$

$$\therefore\quad y_h=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$$

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}-xe^{-x} \end{vmatrix}=e^{-2x}$$

令其特解 $y_p(x)=u_1y_1+u_2y_2=u_1e^{-x}+u_2xe^{-x}$ 代回 ODE 後可得

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ e^{-x}\ln|x| & e^{-x}-xe^{-x} \end{vmatrix}}{e^{-2x}}=-x\ln|x| \quad \Rightarrow u_1=-\frac{1}{2}x^2\ln|x|+\frac{1}{4}x^2$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W}=\frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}\ln|x| \end{vmatrix}}{e^{-2x}}=\ln|x| \quad \Rightarrow u_2=x\ln|x|-x$$

$$\therefore\quad y_p(x)=u_1e^{-x}+u_2\cdot xe^{-x}=(-\frac{1}{2}x^2\ln|x|+\frac{1}{4}x^2)e^{-x}+(x\ln|x|-x)\cdot xe^{-x}$$
$$=(\frac{1}{2}x^2\ln|x|-\frac{3}{4}x^2)e^{-x}$$

$$y=y_h(x)+y_p(x)=(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\ln|x|-\frac{3}{4}x^2)e^{-x}$$

(3) $xy'' + (x+2)y' + y = 0$

令 $a_2 = x$，$a_1 = x+2$，$a_0 = 1$

由判斷式: $a_2'' - a_1' + a_0 = 0$ 可知此為正合式

$$xy'' + (x+2)y' + y = \frac{d}{dx}[b_1(x)y' + b_0(x)y]$$

$$\Rightarrow b_1(x)y'' + [b_1'(x) + b_0(x)] + b_0'(x)y = xy'' + (x+2)y' + y$$

$$\Rightarrow b_1 = x,\ b_0 = x+1$$

$$\therefore\ xy'' + (x+2)y' + y = \frac{d}{dx}[xy' + (x+1)y] = 0$$

$$\Rightarrow\ xy' + (x+1)y = C_1$$

$$\Rightarrow\ y' + \frac{x+1}{x}y = \frac{C_1}{x}$$ 此為一階線性 ODE

積分因子: $\mu = e^{\int \frac{x+1}{x}dx} = e^{x+\ln x} = xe^x$

同乘積分因子: $xe^x y' + e^x(x+1)y = C_1 e^x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xe^x y) = C_1 e^x$$

$$\Rightarrow xe^x y = C_1 e^x + C_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x}(C_1 + C_2 e^{-x})$$

(4) $(x-1)^2 y'' - 4(x-1)y' - 14y = x^3 - 3x^2 + 3x - 8$

令 $t = x-1$ $\Rightarrow \dfrac{dy(x)}{dx} = \dfrac{dt}{dx}\cdot\dfrac{dY(t)}{dt} = Y'(t)$

$$\Rightarrow \frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy(x)}{dx}\right) = \frac{dt}{dx}\cdot\frac{dY'(t)}{dt} = Y''(t)$$

$$(x-1)^2 y'' - 4(x-1)y' - 14y = x^3 - 3x^2 + 3x - 8 \ \Rightarrow t^2Y'' - 4tY' - 14Y = t^3 - 7$$

令 $Y = t^m$ $\Rightarrow [m(m-1) - 4m - 14]t^m = 0$

$$\Rightarrow m^2 - 5m - 14 = 0$$

$$\Rightarrow (m+2)(m-7) = 0$$

$$\Rightarrow m = -2 \text{ or } 7$$

$$\therefore\ Y_h(t) = C_1 t^{-2} + C_2 t^7$$

$$W = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^{-2} & t^7 \\ -2t^{-3} & 7t^6 \end{vmatrix} = 9t^4$$

令其特解 $Y_p(t) = u_1Y_1 + u_2Y_2 = u_1t^{-2} + u_2t^7$ 代回 ODE 後可得

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Y_2 \\ \frac{f(t)}{t^2} & Y_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t^7 \\ t-7t^{-2} & 7t^6 \end{vmatrix}}{9t^4} = -\frac{1}{9}t^4 + \frac{7}{9}t \quad \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{45}t^5 + \frac{7}{18}t^2$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} Y_1 & 0 \\ Y_1' & \frac{f(t)}{t^2} \end{vmatrix}}{W} = \frac{\begin{vmatrix} t^{-2} & 0 \\ -2t^{-3} & t-7t^{-2} \end{vmatrix}}{9t^4} = \frac{1}{9}t^{-5} - \frac{7}{9}t^{-8} \quad \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{36}t^{-4} + \frac{1}{9}t^{-7}$$

$$Y_p(t) = u_1 Y_1 + u_2 Y_2 = (-\frac{1}{45}t^5 + \frac{7}{18}t^2)t^{-2} + (-\frac{1}{36}t^{-4} + \frac{1}{9}t^{-7})t^7 = -\frac{1}{20}t^3 + \frac{1}{2}$$

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) = C_1 t^{-2} + C_2 t^7 - \frac{1}{20}t^3 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 (x-1)^{-2} + C_2 (x-1)^7 - \frac{1}{20}(x-1)^3 + \frac{1}{2}$$

5. 已知微分方程式 $(x+2)y''-(2x+5)y'+2y=0$

(1) 已知 $y_1=e^{ax}$ **為上述 ODE 之一補解，試問** $a=?$ **(2%)**

(2) 試問:另一補解為何? (8%)

(1) $(x+2)y''-(2x+5)y'+2y=0$

令 $y_1=e^{ax}$ 代入 ODE 可得

$$a^2(x+2)e^{ax}-a(2x+5)e^{ax}+2e^{ax}=0$$

$$\Rightarrow (a^2-2a)x+2a^2-5a+2=0$$

$$\Rightarrow a=2$$

故可得一補解為 $y_1=e^{2x}$

(2) $(x+2)y''-(2x+5)y'+2y=0$

$$\Rightarrow y''-\frac{2x+5}{x+2}y'+\frac{2}{x+2}y=0$$

又 $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2$

且 $W'-\dfrac{2x+5}{x+2}W=0 \quad \Rightarrow W'-\dfrac{2x+5}{x+2}W=0$

$$\Rightarrow W=C_1e^{\int\frac{2x+5}{x+2}dx}=C_1e^{2x+\ln(x+2)}=C_1(x+2)e^{2x}$$

$$\Rightarrow y_1y_2'-y_1'y_2=C_1(x+2)e^{2x}$$

$$\Rightarrow y_2'-2y_2=C_1(x+2)$$

$$\Rightarrow e^{-2x}y_2'-2e^{-2x}y_2=C_1(x+2)e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-2x}y_2)=C_1(x+2)e^{-2x}$$

$$\Rightarrow e^{-2x}y_2=C_1(-\frac{x}{2}-\frac{5}{4})e^{-2x}+C_2$$

$$\Rightarrow y_2=C_1(-\frac{x}{2}-\frac{5}{4})+C_2e^{2x}$$

$\therefore$ 另一補解 $y_2=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{4}$

6. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$，若給定質量塊 $m=4$，阻尼係數 $c=0$ 與彈簧常數 $k=16$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0)=0$ 與 $\dot{y}(0)=0$，給一外力為 $f(t)=\sin\omega t$

試問:

(1) 當 $\omega=?$，此系統會產生共振行為。 **(4%)**

(2) 當系統產生共振時，此時其解為何? **(8%)**

(1) $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$ 又 $m=4$，$c=0$，$k=16$ 與 $f(t)=\sin\omega t$

$\therefore\ 4\ddot{y}(t)+16y(t)=\sin\omega t$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=2$$

當 $\omega=\omega_n=2$ 時，系統會產生共振現象。

(2) $\ddot{y}(t)+4y(t)=\frac{1}{4}\sin 2t$

令 $y(t)=e^{\lambda t}$ 代入 ODE 可得

$(\lambda^2+4)e^{\lambda x}=0 \quad \Rightarrow \lambda^2+4=0 \quad \Rightarrow \lambda=2i,-2i$

$\therefore\ y_h=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$

令 $y_p=t(A\cos 2t+B\sin 2t)=t\cdot y_h$

$$\dot{y}_p=y_h+t\,\dot{y}_h$$

$$\ddot{y}_p=\dot{y}_h+\dot{y}_h+t\,\ddot{y}_h=2\dot{y}_h+t\,\ddot{y}_h$$ 代回 ODE 可得

$$(2\dot{y}_h+t\cdot\ddot{y}_h)+t\cdot y_h=\frac{1}{4}\sin t$$

$$\Rightarrow \dot{y}_h=\frac{1}{8}\sin t$$

$$\Rightarrow 2(-A\sin 2t+B\cos 2t)=\frac{1}{8}\sin 2t$$

$$\therefore\ A=-\frac{1}{16},\ B=0$$

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t-\frac{1}{16}t\cdot\cos 2t$$

又 $y(0)=0 \quad \Rightarrow C_1=0$

$\dot{y}(0)=0 \quad \Rightarrow C_2=\frac{1}{32}$

$$\therefore\ y(t)=\frac{1}{32}\sin 2t-\frac{1}{16}t\cdot\cos 2t$$