國立臺灣海洋大學河海工程學系 2024 工程數學(一) 第一次大考參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 某一國家之人口增加率與該國現有人口成正比。如果兩年後人口數增加為兩倍且三年後人口數為 20,000，求最初國內之人口數?（$\ln 2 = 0.6932$）(10%)

2. 試以分離變數法或結合變數變換法求解下述微分方程式

   (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x}{1+2y^2}$， $y(0)=1$ (8%) (112 北科土木)

   (2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+x+y}{2+x+y}$ (8%)

   (3) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+y-3}{x+y-1}$ (8%)

3. 已知微分方程式為 $y(\ln y)dx + (x-\ln y)dy = 0$

   (1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(7%)
   (若為線性，直接求解；若非線性，則轉換成線性，再求解)

   (2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(7%)
   (若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

4. 已知微分方程式為 $y' + \dfrac{3}{x}y = -2xy^{\frac{5}{2}}$

   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

   (2) 此為線性或非線性? (2%)

   (3) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ (8%)

5. 已知微分方程式為 $y' = 1 + (y-x)^2$ (112 台大生物產業)

   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

   (2) 此為線性或非線性? (2%)

   (3) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ (8%)

6. 試解下列各微分方程

   (1) $xy' - y = \dfrac{y}{\ln y - \ln x}$ (8%)

   (2) $2xydx + (4y+3x^2)dy = 0$ (8%)

   (3) $y'(y'+y) = x(x+y)$ (8%)

<參考解答>

1. 某一國家之人口增加率與該國現有人口成正比。如果兩年後人口數增加為兩倍且三年後人口數為 20,000，求最初國內之人口數?

設人口數為 $y(t)$ 且初始人口數為 y_0，即 $y(0)=y_0$

$\dfrac{dy}{dt}=ky \quad \Rightarrow y(t)=Ce^{kt}$

又 $y(0)=y_0 \quad \Rightarrow C=y_0$

$\therefore \quad y(t)=y_0 e^{kt}$

且 $y(2)=2y_0 \quad \Rightarrow 2=e^{2k} \quad \Rightarrow k=\dfrac{\ln 2}{2}=0.3466$

$y(3)=20000 \quad \Rightarrow 20000=y_0 e^{0.3466\cdot 3} \quad \Rightarrow y_0=7070$

$\therefore$ 最初人口 7070 人

2. 試以分離變數法或結合變數變換法求解下述微分方程式

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\cos x}{1+2y^2}$, $y(0)=1$ (8%)

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+x+y}{2+x+y}$ (8%)

(3) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y-3}{x+y-1}$ (8%)

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\cos x}{1+2y^2} \quad \Rightarrow \dfrac{1+2y^2}{y}dy=\cos x\,dx$

$\Rightarrow \int(\dfrac{1}{y}+2y)dy=\int\cos x\,dx$

$\Rightarrow \ln|y|+y^2=\sin x+C$

又 $y(0)=1 \quad \Rightarrow C=1$

$\therefore \quad \ln|y|+y^2=\sin x+1$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+x+y}{2+x+y}$

令 $u=x+y \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=1+\dfrac{dy}{dx}$

代回 ODE 可得 $\dfrac{du}{dx}-1=\dfrac{1+u}{2+u} \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=\dfrac{3+2u}{2+u}$

$$\Rightarrow \int \frac{u+2}{2u+3}du=\int dx$$

$$\Rightarrow \int (\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{2u+3})du=\int dx$$

$$\Rightarrow \frac{u}{2}+\frac{1}{4}\ln|2u+3|=x+C_1$$

$$\Rightarrow 2(y-x)+\ln|2x+2y+3|=C$$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y-3}{x+y-1}$

令 $x=u+a \quad \Rightarrow dx=du$

$y=v+b \quad \Rightarrow dy=dv$

代回 ODE 可得 $\dfrac{dv}{du}=-\dfrac{2u+v+(2a+b-3)}{u+v+(a+b-1)}$

可得 $\begin{cases} 2a+b-3=0 \\ a+b-1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

$$\therefore \quad \frac{dv}{du}=-\frac{2u+v}{u+v} \quad \Rightarrow \frac{dv}{du}=-\frac{2+\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}$$

令 $t=\dfrac{v}{u} \quad \Rightarrow v=ut \quad \Rightarrow \dfrac{dv}{du}=t+u\dfrac{dt}{du}$ 代回 ODE 可得

$$t+u\frac{dt}{du}=-\frac{2+t}{1+t} \quad \Rightarrow u\frac{dt}{du}=-\frac{2+t}{1+t}-t=-\frac{2+2t+t^2}{1+t}$$

$$\Rightarrow -\frac{t+1}{t^2+2t+2}dt=\frac{1}{u}du$$

$$\Rightarrow -\int \frac{t+1}{t^2+2t+2}dt=\int \frac{1}{u}du$$

令 $s=t^2+2t+2 \quad \Rightarrow ds=2(t+1)dt$

$$\therefore \quad \Rightarrow -\int \frac{t+1}{t^2+2t+2}dt=\int \frac{1}{u}du \quad \Rightarrow -\int \frac{1}{s}ds=2\int \frac{1}{u}du$$

$$\Rightarrow -\ln|s|=2\ln|u|+\ln C_1$$

$$\Rightarrow su^2=\frac{1}{C_1}$$

$$\Rightarrow (t^2+2t+2)u^2=C_2$$

$$\Rightarrow (\frac{v^2}{u^2}+2\frac{v}{u}+2)u^2 = C_2$$
$$\Rightarrow v^2+2uv+2u^2 = C_2$$
$$\Rightarrow (y+1)^2+2(x-2)(y+1)+2(x-2)^2 = C_2$$
$$\Rightarrow 2x^2+2xy+y^2-6x-2y = C$$

3. 已知微分方程式為 $y(\ln y)dx+(x-\ln y)dy=0$
   (1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(7%)
   (若為線性，直接求解；若非線性，則轉換成線性，再求解)
   (2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(7%)
   (若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

(1) $\frac{dy}{dx}+\frac{y\cdot\ln y}{x-\ln y}=0$

$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y\cdot\ln y}x=\frac{1}{y}$

若以 x 為自變數，y 為應變數，則此為一階非線性微分方程式

若以 y 為自變數，x 為應變數，則此為一階線性微分方程式

$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y\cdot\ln y}x=\frac{1}{y}$

積分因子 $\mu = e^{\int p(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y\cdot\ln y}dy} = e^{\int \frac{1}{\ln y}d(\ln y)} = e^{\ln(\ln y)} = \ln y$

同乘積分因子後可得

$$\ln y\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=\frac{\ln y}{y} \quad \Rightarrow \frac{d}{dy}(x\cdot\ln y)=\frac{\ln y}{y}$$
$$\Rightarrow x\cdot\ln y=\int\frac{\ln y}{y}dy=\int \ln y\, d(\ln y)=\frac{1}{2}(\ln y)^2+C$$

$\therefore\ x\cdot\ln y=\frac{1}{2}(\ln y)^2+C$

(2) $y(\ln y)dx+(x-\ln y)dy=0$

令 $M=y(\ln y) \quad \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\ln y+1$

$N=x-\ln y \quad \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=1$

由判斷式 $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ 可知，此為非正合 ODE

由 $\frac{1}{M}(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})=-\frac{1}{y}$ 可知積分因子 $\mu=\mu(y)$

$$\therefore \quad \mu = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$$

同乘積分因子後可得

$$(\ln y)dx + \frac{x-\ln y}{y}dy = 0$$

此為正合 ODE

$$\therefore \text{可知} \quad \overline{M} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \ln y \quad \Rightarrow \phi = x \cdot \ln y + f(y)$$

$$\overline{N} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x-\ln y}{y} \quad \Rightarrow \phi = x \cdot \ln y - \frac{1}{2}(\ln y)^2 + g(x)$$

比較後可得 $\phi(x,y) = x \cdot \ln y - \frac{1}{2}(\ln y)^2 = C$

4. 已知微分方程式為 $y' + \frac{3}{x}y = -2xy^{\frac{5}{2}}$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 此為線性或非線性? (2%)

(3) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ (8%)

(1) 此為 Bernoulli ODE

(2) 此為非線性

(3) $y' + \frac{3}{x}y = -2xy^{\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow y^{-\frac{5}{2}}y' + \frac{3}{x}y^{-\frac{3}{2}} = -2x$

令 $u = y^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{3}{2}y^{-\frac{5}{2}} \cdot y'$ 代回上式可得

$$-\frac{2}{3}\frac{du}{dx} + \frac{3}{x}u = -2x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} - \frac{9}{2x}u = 3x$$

此為一階線性微分方程式

積分因子 $\mu = e^{\int -\frac{9}{2x}dx} = e^{-\frac{9}{2}\ln x} = x^{-\frac{9}{2}}$

同乘積分因子後可得

$$x^{-\frac{9}{2}}\frac{du}{dx} - \frac{9}{2}x^{-\frac{11}{2}}u = 3x^{-\frac{7}{2}} \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^{-\frac{9}{2}}u) = 3x^{-\frac{7}{2}}$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{9}{2}}u = -\frac{6}{5}x^{-\frac{5}{2}} + C$$

$$\Rightarrow u = -\frac{6}{5}x^2 + C \cdot x^{\frac{9}{2}}$$

$$\Rightarrow y^{-\frac{3}{2}} = -\frac{6}{5}x^2 + C \cdot x^{\frac{9}{2}}$$

5. 已知微分方程式為 $y'=1+(y-x)^2$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 此為線性或非線性? (2%)

(3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=$? (8%)

(1) $y'=1+(y-x)^2 \quad \Rightarrow y'=y^2-2xy+x^2+1$

此為 Riccati ODE

(2) 此為非線性

(3) 由觀察可得一解 $S=x$

令 $y=S+\dfrac{1}{V}=x+\dfrac{1}{V} \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{V'}{V^2}$ 代回 ODE 可得

$$1-\frac{V'}{V^2}=(x+\frac{1}{V})^2-2x(x+\frac{1}{V})+x^2+1 \qquad \Rightarrow V'=-1$$

$$\Rightarrow V=-x+C$$

$$\therefore \quad y=S+\frac{1}{V}=x-\frac{1}{x-C}$$

6. 試解下列各微分方程

(1) $xy'-y=\dfrac{y}{\ln y-\ln x}$ (8%)

(2) $2xydx+(4y+3x^2)dy=0$ (8%)

(3) $y'(y'+y)=x(x+y)$ (8%)

(1) $xy'-y=\dfrac{y}{\ln y-\ln x} \quad \Rightarrow xdy-ydx=\dfrac{y}{\ln\frac{y}{x}}dx$

$$\Rightarrow \frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{y}{\ln\frac{y}{x}}dx$$

$$\Rightarrow \frac{\ln\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}}d(\frac{y}{x})=\frac{1}{x}dx$$

(令 $u=\dfrac{y}{x}$ 並對兩邊積分) $\Rightarrow \displaystyle\int\frac{\ln u}{u}du=\int\frac{1}{x}dx$

$$\Rightarrow \int \ln u\, d(\ln u)=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\ln|u|)^2=\ln|x|+C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\ln\left|\frac{y}{x}\right|)^2 = \ln|x| + C$$

(2) $2xydx + (4y + 3x^2)dy = 0$

$$\Rightarrow x(2ydx + 3xdy) + 4ydy = 0$$

$$\Rightarrow x\frac{d(x^2y^3)}{xy^2} + 4ydy = 0$$

$$\Rightarrow \int d(x^2y^3) + \int 4y^3dy = 0$$

$$\Rightarrow x^2y^3 + y^4 = C$$

(3) $y'(y' + y) = x(x + y)$

令 $u = y'$ 代回 ODE 可得

$$u(u + y) = x(x + y)$$

$$\Rightarrow u^2 + uy - xy - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow (u - x)(u + x) + y(u - x) = 0$$

$$\Rightarrow (u - x)(u + x + y) = 0$$

$$\Rightarrow u = x \text{ or } u + x + y = 0$$

$$u = x \quad \Rightarrow y' = x \quad \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \quad \Rightarrow y - \frac{1}{2}x^2 - C_1 = 0$$

$$u + x + y = 0 \quad \Rightarrow y' + y = -x \quad \Rightarrow e^x y' + e^x y = -xe^x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x y) = -xe^x$$

$$\Rightarrow e^x y = -\int xe^x dx = -e^x(x - 1) + C_2$$

$$\Rightarrow y = -x + 1 + C_2e^{-x}$$

$$\Rightarrow y + x - 1 - C_2e^{-x} = 0$$

$\therefore$ 此 ODE 的解為 $(y - \frac{1}{2}x^2 - C_1)(y + x - 1 - C_2e^{-x}) = 0$