國立臺灣海洋大學河海工程學系 2024 工程數學(一) 期末考參考解答

系級：________　　學號：________　　姓名：________

1. 已知 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & a\\ b & c\end{bmatrix}$ 是一個單位正交矩陣，並且 $a>0$ 與 $b>0$，試求 a, b, c 之值。

(10%)

2. 已知兩矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 0 & 1 & -3 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 0\end{bmatrix}$, 試求 $\det(AB)=?$ (10%)

3. 令 $T:R^3\to R^2$ 為一線性轉換，使得 $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$，$T\left(\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5\\-5\end{bmatrix}$ 與

$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

(1) 試問: $T\left(\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}\right)=?$ (5%)

(2) 試問 T 為何? (5%)

4. 給定 $A=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$，試問: $\lim_{n\to\infty}A^n=?$ (10%)

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -1\end{bmatrix}$，試問:

(1) A 的特徵方程為何? (3%)
(2) 試由 Cayley-Hamilton 定理求 $A^{100}-3A^{25}=?$ (6%)
(3) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$，則 $p=?$, $q=?$, $r=?$ (6%)
(4) 試將 A 化為 Jordan form，即 $A=PJP^{-1}$ (6%)
(5) 試以 Jordan form 法計算 $A^{100}-3A^{25}=?$ (6%)
(6) 若 $A^{-1}=P\bar{J}P^{-1}$，則 $\bar{J}=?$ (3%)

6. 佈於 R^4 的三向量 $x^1=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$, $x^2=\begin{bmatrix}0 & -2 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$, $x^3=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$

試請: (1) 根據此組向量找出正交單位向量集 $\{y^1\ y^2\ y^3\}$。 (6%)

(2) 找出與 $\{y^1\ y^2\ y^3\}$ 皆垂直之單位向量 y^4。 (4%)

7. 給方程式 $5x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2-21=0$,試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸,即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T=[y_1\ y_2]$,

試問: (1) 其轉換矩陣為何? (6%)

(2) 此方程代表何種圓錐曲線? (2%)

(3) $Q=5x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$ 為何種型式二次式? (2%)
(正定、負定或是不定型)

8. 試解下述聯立微分方程

$$\frac{dx}{dt}=2x-y-5t$$
$$\frac{dy}{dt}=3x+6y-4$$
(10%)

參考解答:

1. 已知 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & c \end{bmatrix}$ **是一個單位正交矩陣，並且** $a>0$ **與** $b>0$ **，試求** a, b, c **之值。**

(10%)

$\because$ A 是單位正交矩陣，且 $a>0$ 與 $b>0$

$\therefore$ 可知 $A^T A = I$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & b \\ a & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4}+b^2=1 \qquad \text{...... (1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}a+bc=0 \qquad \text{...... (2)}$$

$$a^2+c^2=1 \qquad \text{...... (3)}$$

由第(1)式可得 $b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because b>0$，故取正值)

代入第(2)式可得 $a=-\sqrt{3}\,c$

代入第(3)式可得 $c=\pm\dfrac{1}{2}$

由於 $a>0$ 故可知 $c=-\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 可知 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $c=-\dfrac{1}{2}$

2. 已知兩矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 0 \end{bmatrix}$**, 試求** $\det(AB)=?$ **(10%)**

$\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$

又 $\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}=0$ (任兩列成比例)

$\therefore \det(B)$ 不用算

$\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)=0$

3. 令 $T: R^3 \to R^2$ 為一線性轉換，使得$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$，$T\left(\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5\\-5\end{bmatrix}$與

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

(1) 試問: $T\left(\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}\right)=?$ **(5%)**

(2) 試問 *T* 為何? (5%)

(1) 令 $\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow a=-2,\ b=2,\ c=6$

$$T\left(\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix}\right)=a\cdot T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}\right)+b\cdot T\left(\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}\right)+c\cdot T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$=-2\cdot\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}5\\-5\end{bmatrix}+6\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$

(2) $T\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & -2 & 1\\-2 & -3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5 & -1\\0 & -5 & 2\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow T=\begin{bmatrix}3 & 5 & -1\\0 & -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & -2 & 1\\-2 & -3 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 5 & -1\\0 & -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\-2 & 2 & -1\\-4 & 5 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -4 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4. **給定** $A=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$**，試問：** $\lim_{n\to\infty} A^n = ?$ **(10%)**

$$|A-\lambda I|=0 \;\Rightarrow \begin{vmatrix}\frac{3}{5}-\lambda & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow (\frac{3}{5}-\lambda)^2-(\frac{2}{5})^2=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\,(\frac{1}{5}-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1 \text{ or } \frac{1}{5}$$

當 $\lambda_1=1$ 時，$(A-\lambda_1 I)x^1=0 \quad \Rightarrow x^1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

當 $\lambda_2=\frac{1}{5}$ 時，$(A-\lambda_2 I)x^2=0 \quad \Rightarrow x^2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$，$S=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \;\Rightarrow S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$$\therefore\; A=SDS^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} A^n=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^\infty & 0\\ 0 & (\frac{1}{5})^\infty\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

5. **已知** $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -1\end{bmatrix}$ **，試問:**

(1) A **的特徵方程為何? (3%)**

(2) 試由 Cayley-Hamilton 定理求 $A^{100}-3A^{25}=?$ **(6%)**

(3) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ **，則** $p=?$**，**$q=?$**，**$r=?$ **(6%)**

(4) 試將 A 化為 Jordan form，即 $A=PJP^{-1}$ **(6%)**

(5) 試以 Jordan form 法計算 $A^{100}-3A^{25}=?$ **(6%)**

(6) 若 $A^{-1}=P\bar{J}P^{-1}$ **，則** $\bar{J}=?$ **(3%)**

(1) $\det(A-\lambda I)=0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 1\\ 2 & 1-\lambda & 1\\ 0 & -4 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0 \ \Rightarrow \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$

$$\Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$
$$\Rightarrow \lambda=1,1,-1$$

(2) 由 Cayley-Hamilton 定理可知 $C(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$

$$\Rightarrow C(A)=A^3-A^2-A+I$$

又 $C(1)=0$，$C'(1)=0$，$C(-1)=0$

$f(A)=A^{100}-3A^{25}=Q(A)\cdot C(A)+pA^2+qA+rI$

$f(\lambda)=\lambda^{100}-3\lambda^{25}=Q(\lambda)\cdot C(\lambda)+p\lambda^2+q\lambda+r$

由 $\lambda=1$ 可得 $f(1)=-2=p+q+r$ ... (1)

由 $\lambda=-1$ 可得 $f(-1)=4=p-q+r$ ... (2)

微分可得 $f'(\lambda)=100\lambda^{99}-75\lambda^{24}$

$$=Q'(\lambda)\cdot C(\lambda)+Q'(\lambda)\cdot C'(\lambda)+2p\lambda+q$$

由 $\lambda=1$ 可得 $f'(1)=25=2p+q$ ... (3)

由(1)、(2)、(3)可得 $p=14$，$q=-3$，$r=-13$

$\therefore \quad f(A)=14A^2-3A-13I$

$$=14\begin{bmatrix}5 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 2\\ -8 & 0 & -3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -1\end{bmatrix}-13\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}54 & -6 & 25\\ 50 & -2 & 25\\ -112 & 12 & -52\end{bmatrix}$$

(3) $A^3 - A^2 - A + I = 0 \;\Rightarrow A^{-1}(A^3 - A^2 - A + I) = 0$

$$\Rightarrow A^{-1} = -A^2 + A + I$$

$\therefore\;\; p = -1，q = 1，r = 1$

$$A^{-1} = -A^2 + A + I = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & -2 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(4) 當 $\lambda_1 = -1 \;\Rightarrow (A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1 \;\Rightarrow (A - \lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow x^2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

因為 2 個特徵值只對應到一個特徵向量，故須引入一條廣義特徵向量

$$Ax^3 = \lambda_2 x^3 + x^2 \;\Rightarrow (A - \lambda_3 I)x^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^3 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

取 $t = 0$，可得 $x^3 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$\therefore\;\; J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\; P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = PJP^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(5) $A^{100} - 3A^{25} = PJ_1P^{-1} \quad \Rightarrow J_1 = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & f'(\lambda_2) \\ 0 & 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow J_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 25 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{100} - 3A^{25} = PJ_1P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 25 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 54 & -6 & 25 \\ 50 & -2 & 25 \\ -112 & 12 & -52 \end{bmatrix}$$

(6) $A^{-1} = P\bar{J}P^{-1} \quad \Rightarrow \bar{J} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & f'(\lambda_2) \\ 0 & 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \bar{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = P\bar{J}P^{-1} \quad \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

6. 佈於 R^4 的三向量 $x^1=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$， $x^2=\begin{bmatrix}0 & -2 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$， $x^3=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$

試請：(1) 根據此組向量找出正交單位向量集 $\{y^1\ y^2\ y^3\}$。 **(6%)**

(2) 找出與 $\{y^1\ y^2\ y^3\}$ **皆垂直之單位向量** y^4 。 **(4%)**

(1) 由 Gram-Schmidt 正交化法，取 $y^1=\dfrac{x^1}{|x^1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$

$$v^2=x^2-<y^1,x^2>y^1=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T \quad \Rightarrow y^2=\frac{v^2}{|v^2|}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$$

$$v^3=x^3-<y^1,x^3>y^1-<y^2,x^3>y^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$$

$$\Rightarrow y^3=\frac{v^3}{|v^3|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$$

(2) 令 $y^4=\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & y_3 & y_4\end{bmatrix}^T$

又 y^4 與 y^1，y^2，y^3 皆垂直

故可知 $<y^4,y^1>=0 \quad \Rightarrow y_1-y_2=0 \ \ ...(1)$

$<y^4,y^2>=0 \quad \Rightarrow y_1+y_2+y_3-y_4=0 \ \ ...(2)$

$<y^4,y^3>=0 \quad \Rightarrow y_3+y_4=0 \ \ ...(3)$

由(3)可得 $y_4=-y_3=t$

代回(2)可得 $y_1+y_2=2t \ \ ...(4)$

由(1)、(4)可得 $y_1=t$， $y_2=t$

$\therefore y^4=t\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$ 又 y^4 為單位向量，故取 $t=\dfrac{1}{2}$ 即 $y^4=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$

7. **給方程式** $5x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2-21=0$ **，試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸，即將舊座標向量** $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2]$ **轉換至新座標向量** $\mathbf{y}^T=[y_1\ y_2]$ **，**

試問: (1) 其轉換矩陣為何? (6%)

(2) 此方程代表何種圓錐曲線? (2%)

(3) $Q=5x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$ **為何種型式二次式? (2%)**

(正定、負定或是不定型)

(1) $5x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2=21 \Rightarrow \mathbf{x}^T\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\mathbf{x}=31$ 其中 $\mathbf{x}=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}$

由 $|A-\lambda I|=0 \quad \Rightarrow\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda=3 \text{ or } 7$

當 $\lambda=3$ 時，$\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}$

當 $\lambda=7$ 時，$\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$

$\therefore \quad s=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow s^{-1}=s^T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

令 $y=s^Tx$

$$x^T\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}x=21 \quad \Rightarrow x^Ts\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}s^Tx=21$$

$$\Rightarrow y^T\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}y=21$$

$$\Rightarrow 3y_1^2+7y_2^2=21$$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{(\sqrt{7})^2}+\frac{y_2^2}{(\sqrt{3})^2}=1$$

(2) 此為橢圓曲線

(3) $\because \quad \lambda_1>0,\ \lambda_2>0$

$\therefore \quad Q=5x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2=3y_1^2+7y_2^2>0$

故為正定型二次式

8. 試解下述聯立微分方程

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y - 5t \qquad \textbf{(10\%)}$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x + 6y - 4$$

可將聯立 ODE 變成下式

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) - Z(t) \quad \text{其中} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(y) \end{bmatrix},\ Z(t) = \begin{bmatrix} 5t \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \ \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0 \ \Rightarrow \lambda = 3 \text{ or } 5$$

$$\text{當}\ \lambda = 3 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{當}\ \lambda = 5 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \quad A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{令} \quad X = SY \quad \Rightarrow S\frac{dY}{dt} = ASY + Z \ \Rightarrow \frac{dY}{dt} = S^{-1}ASY + S^{-1}Z$$

$$\therefore \quad \begin{Bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 5t \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5t \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{x}} = 3\bar{x} - \dfrac{1}{2}(15t + 4) \\ \dot{\bar{y}} = 5\bar{y} + \dfrac{1}{2}(5t + 4) \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = c_1 e^{3t} + \dfrac{5}{2}t + \dfrac{3}{2} \\ \bar{y} = c_2 e^{5t} - \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 e^{3t} + \dfrac{5}{2}t + \dfrac{3}{2} \\ c_2 e^{5t} - \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 e^{5t} + 2t + 1 \\ -c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{5t} - t \end{Bmatrix}$$