

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 已知 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & c \end{bmatrix}$ 是一個單位正交矩陣，並且 $a > 0$ 與 $b > 0$ ，試求 a, b, c 之值。

(10%)

2. 已知兩矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 0 \end{bmatrix}$, 試求 $\det(AB) = ?$ (10%)

3. 令 $T: R^3 \rightarrow R^2$ 為一線性轉換，使得 $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$ 與

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 試問: $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = ?$ (5%)

(2) 試問 T 為何? (5%)

4. 給定 $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{5} & \frac{5}{5} \end{bmatrix}$, 試問: $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = ?$ (10%)

5. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$, 試問:

(1) A 的特徵方程為何? (3%)

(2) 試由 Cayley-Hamilton 定理求 $A^{100} - 3A^{25} = ?$ (6%)

(3) 若 $A^{-1} = pA^2 + qA + rI$, 則 $p = ?$, $q = ?$, $r = ?$ (6%)

(4) 試將 A 化為 Jordan form, 即 $A = PJP^{-1}$ (6%)

(5) 試以 Jordan form 法計算 $A^{100} - 3A^{25} = ?$ (6%)

(6) 若 $A^{-1} = P\bar{J}P^{-1}$, 則 $\bar{J} = ?$ (3%)

6. 佈於 R^4 的三向量 $x^1 = [1 \ -1 \ 0 \ 0]^T$, $x^2 = [0 \ -2 \ -1 \ 1]^T$, $x^3 = [-1 \ 3 \ 2 \ 0]^T$

試請：(1) 根據此組向量找出正交單位向量集 $\{y^1 \ y^2 \ y^3\}$ 。 (6%)

(2) 找出與 $\{y^1 \ y^2 \ y^3\}$ 皆垂直之單位向量 y^4 。 (4%)

7. 給方程式 $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 21 = 0$ ，試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2]$ ，

試問：(1) 其轉換矩陣為何? (6%)

(2) 此方程代表何種圓錐曲線? (2%)

(3) $Q = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ 為何種型式二次式? (2%)

(正定、負定或是不定型)

8. 試解下述聯立微分方程

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - y - 5t \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + 6y - 4 \end{aligned} \quad (10\%)$$