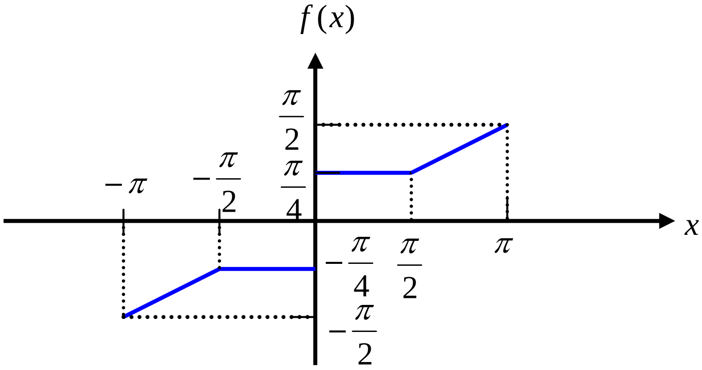
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2024 工程數學(二) 第二次大考

系級：_______________ 學號：_____________ 姓名：____________

1. 已知 $f(t)=\begin{cases} 0, & -\pi<t<0 \\ \sin 2t, & 0<t<\pi \end{cases}$

   (1) 試將 $f(t)$ 展成傅立葉級數。(8%) (2) 試將 $f(t)$ 展成傅立葉積分。(8%)

2. 給一週期函數如下圖所示，已知其週期為 2π，試求此函數 $f(x)$ 之傅立葉級數，並列出前三個係數(a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)之值為何? (12%)



3. 給一函數 $f(x)=-2x^2$ 其中 $-1<x<1$ 並且又有 $f(x+2n)=f(x)$，n 為正整數

   (1) 請畫出函數 $f(x)$ 之圖形。(2%)

   (2) 試問此函數為奇函數或是偶函數? (2%) 週期 $T=?$ (2%)

   (3) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(6%)

   (4) 試問: $1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}-\cdots=?$ (5%)

   (5) 試問: $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots=?$ (5%)

4. (1) 試求函數 $f(t)=\begin{cases} 0, & -\infty<t\le -1 \\ 1+t, & -1<t\le 0 \\ 1-t, & 0<t\le 1 \\ 0, & 1<t<\infty \end{cases}$ 的傅立葉積分表示式。(8%)

   (2) 試問 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (5%)

5. 已知函數 $f(x)=e^{-|x|}$ 與 $g(x)=H(x+1)-H(x-1)$，其中 $H(x)$ 為單位步階函數，其定義為 $H(x)=\begin{cases} 1, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

   (1) 試求： $f(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)=?$ (5%)

   (2) 試求： $g(x)$ 之傅立葉轉換 $G(\omega)=?$ (5%)

   (3) 試求： $\displaystyle\int_{\infty}^{-\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (5%)

   (4) 取 $q(x)=f(x)*g(x)$，試問： $q(x)=?$ (5%)

   (hint： 分 $x<-1$, $-1<x<1$, $1<x$ 討論)

   (5) $Q(\omega)=\mathcal{F}[q(x)]=?$ (5%)

6. (1) 試求 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a>0$。 (6%)

(2) 試求 $H(\omega)=\dfrac{e^{-4\omega i}}{3+\omega i}$ 之傅立葉反轉換 $h(x)$。 (6%)

傅立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傅立葉積分： $f(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$

其中 $A(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx,\ B(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x},\quad \text{其中 } \omega_n=\frac{2n\pi}{T},\ c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$$

傅立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$

Convolution : $f*g=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\dfrac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$

$\displaystyle\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式： $\cos x=\dfrac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\ \sin x=\dfrac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F(\dfrac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$