國立臺灣海洋大學河海工程學系 2024 工程數學(二) 第一次大考參考解答

系級：_______________ 學號：_____________ 姓名：____________

1. 求下列向量梯度、散度、旋度(gradient、divergence、curl)的計算。

   $f=\cos^2 x+\sin^2 y$, $g=x+y+z$, $\vec{v}=[yz, zx, xy]$

   (1) $\nabla\cdot(\nabla f)$ (2) $\nabla\times(\nabla f)$ (3) $\nabla(fg)$ (4) $\nabla\times\vec{v}$ (16%)

2. 空間兩平面方程式分別為 $2x+4y-z=5$, $x-6y+3z=6$ 其所夾角度為何? (10%)

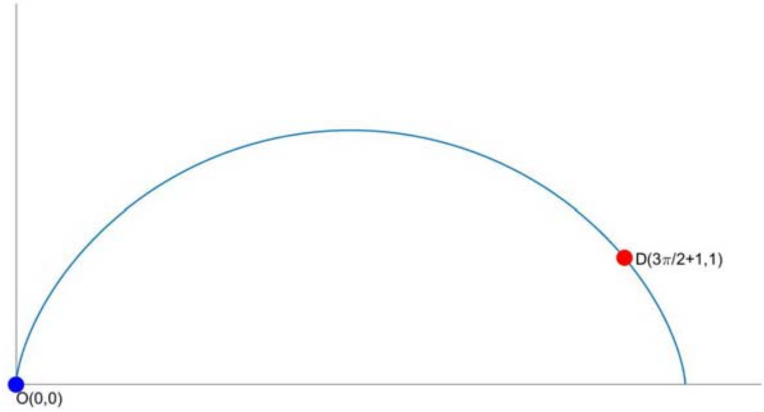
3. 給一向量場 $\vec{F}(x,y,z)=3x^2y^2\,\vec{i}+(2x^3y-e^z)\,\vec{j}+(2z-ye^z)\vec{k}$，試問 $\vec{F}$ 是否為保守場?(5%)(是或否均須說明原因)。若已知 $\vec{F}=\nabla\phi$，試問 ϕ 為何?(5%)

4. 給一擺線如下圖。$\vec{r}(t)=(t-\sin t)\,\vec{i}+(1-\cos t)\,\vec{j}$，其中 $a>0$ 且 $0\le t\le 2\pi$

   (1) 試計算 OD 之弧長。 (5%)

   (2) 給定 $P=-y$ 與 $Q=x$，試由格林定理來求擺線($t=0\to 2\pi$)與 x 軸所交之面積。 (5%)

   (3) 試求在 D 點之單位切向量、單位法向量與曲率 κ。 (9%)



5. 試驗證 Stokes 定理 $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dS$ 其中 $\vec{F}=y\,\vec{i}+(y-x)\,\vec{j}+z^2\vec{k}$

   S 為球面 $x^2+y^2+(z-4)^2=25,\ z\ge 4$ 之部分並且法線方向指向球面外。(18%)

6. 試計算 $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dA$，其中 S 是由 $x^2+y^2\le 9z^2$, $0\le z\le 2$ 所構成之曲面且

   $\vec{F}=(\frac{1}{2}\sin 2x-xy)\,\vec{i}+2y(\sin^2 x-\frac{1}{2})\,\vec{j}+(4+y)z\vec{k}$ (10%)

7. 請參考下圖，並回答下列各題：

其中，$\vec{F}=x\vec{i}+(2z-x)\vec{j}-y^2\vec{k}$，$S=S_1+S_2+S_3+S_4$，

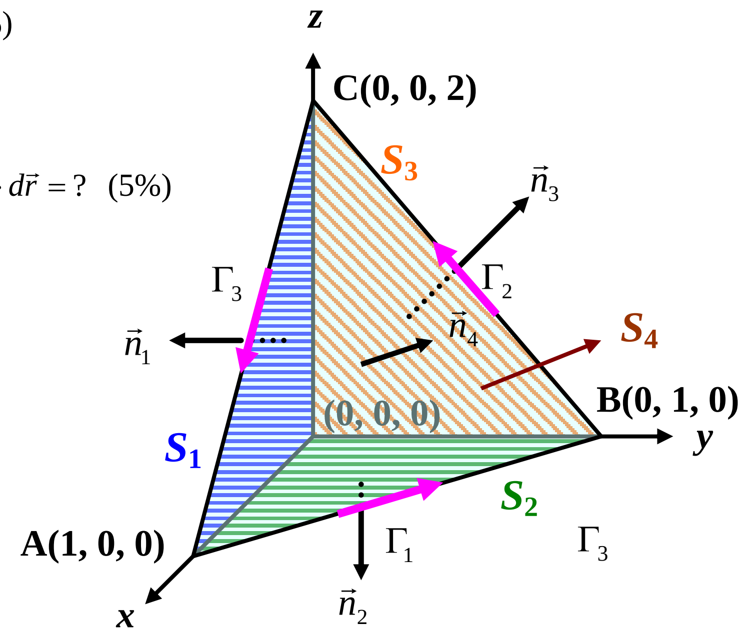
$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$

(1) $\vec{n}_4$ 為斜面 S_4 上的單位法向量，試問：$\vec{n}_4=$？並求斜面 S_4 的方程式。 (4%)

(2) 斜面 S_4 的面積為何？ (4%)

(3) $\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=$？ (4%)

(4) 請使用線積分計算 $\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=$？ (5%)



Hint:

Gauss 散度定理： $\iiint \nabla\cdot\vec{F}\,dV=\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$ **(3D)** $\iint \nabla\cdot\vec{F}\,dA=\oint \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ **(2D)**

格林定理： $\int P\,dx+Q\,dy=\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$

Stokes 旋度定理： $\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}$

曲率： $\kappa=\frac{|y''(x)|}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率：** $\tau=\left|\frac{d(\vec{T}(s)\times\vec{N}(s))}{ds}\right|$

二倍角公式： $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$，$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

四面體體積： $V=\frac{1}{3}A_0 h$，**圓錐體積體積：** $V=\frac{1}{3}A_0 h$ **(**A_0**：底面積；**h**：高)**

球座標： $x=r\sin\theta\cos\phi$，$y=r\sin\theta\sin\phi$，$z=r\cos\theta$

微小球面面積 $dA=r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$ **(**θ**:俯仰角；**ϕ**:水平角)**

參考解答:

1. 求下列向量梯度、散度、旋度(gradient、divergence、curl)的計算。

$f=\cos^2 x+\sin^2 y$, $g=x+y+z$, $\vec{v}=[yz, zx, xy]$

(1) $\nabla\cdot(\nabla f)$ **(2)** $\nabla\times(\nabla f)$ **(3)** $\nabla(fg)$ **(4)** $\nabla\times\vec{v}$ **(15%)** **(108 中興土木甲)**

(1) $\nabla\cdot(\nabla f)=\nabla^2 f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2\cos 2x+2\cos 2y$

(2) $\nabla\times(\nabla f)=0$

(3) $\nabla(fg)=g\nabla f+f\nabla g$

$$=(x+y+z)(-\sin 2x\vec{i}+\sin 2y\vec{j})+(\cos^2 x+\sin^2 y)(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

$$=[-(x+y+z)\sin 2x+(\cos^2 x+\sin^2 y)]\vec{i}$$
$$+[(x+y+z)\sin 2y+(\cos^2 x+\sin^2 y)]\vec{j}$$

$$+(\cos^2 x+\sin^2 y)\vec{k}$$

(4) $\nabla\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ yz & zx & xy\end{vmatrix}=0$

2. 空間兩平面方程式分別為 $2x+4y-z=5$, $x-6y+3z=6$ **其所夾角度為何?**

(10%) （**105 中興土木丙**）

平面: $2x+4y-z=5$ 法向量 $\vec{n}_1=(2,4,-1)$

平面: $x-6y+3z=6$ 法向量 $\vec{n}_2=(1,-6,3)$

所夾角度為 $\cos\theta=\dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\dfrac{-25}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{46}}$

$$\Rightarrow\theta=\cos^{-1}(-\frac{25}{\sqrt{966}})=2.5054\,(rad)=143.55^\circ$$

$\therefore\ \theta=\pi-\cos^{-1}(-\dfrac{25}{\sqrt{966}})=36.45^\circ$

3. 給一向量場 $\vec{F}(x,y,z)=3x^2y^2\,\vec{i}+(2x^3y-e^z)\,\vec{j}+(2z-ye^z)\vec{k}$，試問 $\vec{F}$ 是否為保守場?（5%）(是或否均須說明原因)。若已知 $\vec{F}=\nabla\phi$，試問 ϕ 為何?（5%）

(107 交大土木丙)

$$\because\quad \nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2y^2 & 2x^3y-e^z & 2z-ye^z\end{vmatrix}=0$$

∴ 此為無旋場亦為保守場

$$\vec{F}=\nabla\phi \quad\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=3x^2y^2\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y}=2x^3y-e^z\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z}=2z-ye^z\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}\phi=x^3y^2+f(y,z)\\ \phi=x^3y^2-ye^z+g(x,z)\\ \phi=z^2-ye^z+h(x,y)\end{cases}$$

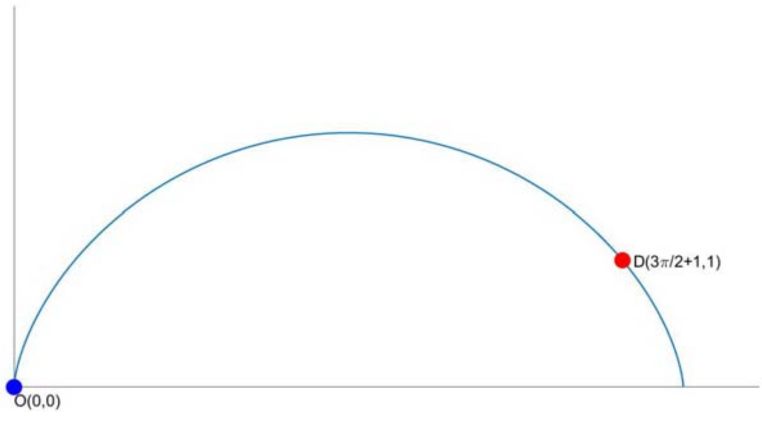
$$\therefore\quad \phi(x,y,z)=x^3y^2-ye^z+z^2+C$$

4. 給一擺線如下圖。$\vec{r}(t)=(t-\sin t)\,\vec{i}+(1-\cos t)\,\vec{j}$，其中 $a>0$ 且 $0\le t\le 2\pi$

(1) 試計算 OD 之弧長。 **(6%)**

(2) 給定 $P=-y$ 與 $Q=x$，試由格林定理來求擺線($t=0\to 2\pi$)與 x 軸所交之面積。 **(6%)**

(3) 試求在 D 點之單位切向量、單位法向量與曲率 κ。 **(6%)**



(1) $\vec{r}(t)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}=(t-\sin t)\vec{i}+(1-\cos t)\,\vec{j}$

$$\therefore\quad x=t-\sin t \quad\Rightarrow dx=(1-\cos t)\,dt$$
$$y=1-\cos t \quad\Rightarrow dy=\sin t\,dt$$

由 $D(\dfrac{3\pi}{2}+1,1)$ 可知，此點為 $t=\dfrac{3\pi}{2}$

$$\therefore \quad S_{OD}=\int ds=\int |d\vec{r}|=\int \sqrt{dx^2+dy^2}=\int \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\ dt$$

$$=\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\ dt$$

$$=\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2-2\cos t}\ dt$$

$$=2\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$=-4\cdot\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$=4+2\sqrt{2}$$

(2) $\oint -ydx+xdy=2\iint dxdy=2A$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\oint -ydx+xdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}[-(1-\cos t)\cdot(1-\cos t)dt+(t-\sin t)\cdot\sin t dt]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}(-1+2\cos t-\cos^2 t+t\sin t-\sin^2 t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}(-2+2\cos t+t\sin t)dt$$

$$=\frac{1}{2}(-2t+2\sin t-t\cos t+\sin t)\Big|_{2\pi}^{0}$$

$$=-\frac{1}{2}(-4\pi-2\pi)$$

$$=3\pi$$

(3) $\vec{r}'(t)=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

$$\vec{r}''(t)=x''\vec{i}+y''\vec{j}$$

$$\kappa=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|x'y''-x''y'|}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$x=t-\sin t \quad \Rightarrow x'=\frac{dx}{dt}=1-\cos t \quad \Rightarrow x''=\frac{d^2x}{dt^2}=\sin t$$

$$y=1-\cos t \quad \Rightarrow y'=\frac{dy}{dt}=\sin t \quad \Rightarrow y''=\frac{d^2y}{dt^2}=\cos t$$

$$\kappa=\frac{|x'y''-x''y'|}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|(1-\cos t)\cdot\cos t-\sin t\cdot\sin t|}{[(1-\cos t)^2+\sin^2 t]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(1-\cos t)}{(2-2\cos t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}(1-\cos t)^{\frac{1}{2}}}$$

將 $t = \dfrac{3\pi}{2}$ 代入，可得 $\kappa = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

單位切向量 $\vec{t} = \dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \dfrac{(1-\cos t)\vec{i} + \sin t\,\vec{j}}{\sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

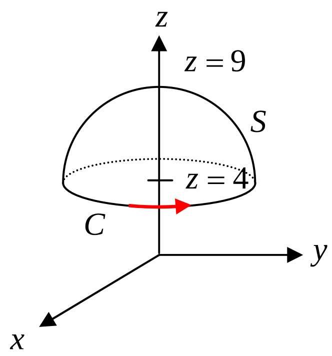
單位法向量 $\vec{n} \perp \vec{t}$ 且朝向內

$\therefore \quad \vec{n} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

5. 試驗證 Stokes 定理 $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dS$ **其中** $\vec{F} = y\,\vec{i} + (y-x)\,\vec{j} + z^2\vec{k}$

S **為球面** $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25,\ z \ge 4$ **之部分並且法線方向指向球面外。(18%)**

(110 成大土木)



$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & y-x & z^2 \end{vmatrix} = -2\vec{k}$$

S: $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25 \quad \Rightarrow z = 4 + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\,\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\,\vec{j} + (4 + \sqrt{25 - x^2 - y^2})\vec{k}$$

$$\vec{n}dS = (\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y})dxdy = (\frac{x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\vec{j} + \vec{k})dxdy$$

$$\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dS = \iint_{S_{xy}} (-2)dxdy = (-2)\cdot S_{xy} = (-2)\cdot(5^2\cdot\pi) = -50\pi$$

S_{xy}: S 投影到 x-y 平面面積

再來計算$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

曲線 C： $x^2+y^2=25$， $z=4 \quad \Rightarrow x=5\cos\theta$ ， $y=5\sin\theta$

$\vec{r}(\theta)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=5\cos\theta\vec{i}+5\sin\theta\vec{j}+4\vec{k}$

$\Rightarrow d\vec{r}=(-5\sin\theta\vec{i}+5\cos\theta\vec{j})d\theta$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}[5\sin\theta\vec{i}+(5\sin\theta-5\cos\theta)\vec{j}+16\vec{k}]\cdot(-5\sin\theta\vec{i}+5\cos\theta\vec{j})d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}[-25\sin^2\theta+25(\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta)]d\theta$$

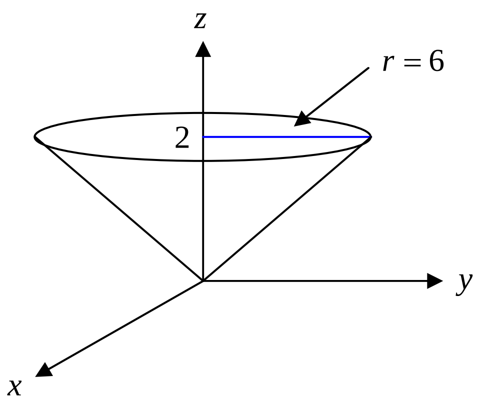
$$=\int_0^{2\pi}(-25+\frac{25}{2}\sin 2\theta)d\theta$$

$$=-50\pi$$

$\therefore \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dS$ 得證

6. 試計算$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dA$**，其中** S **是由**$x^2+y^2\le 9z^2$， $0\le z\le 2$**所構成之曲面且**

$\vec{F}=(\frac{1}{2}\sin 2x-xy)\vec{i}+2y(\sin^2 x-\frac{1}{2})\vec{j}+(4+y)z\vec{k}$ **(10%) (108 交大土木)**



由散度定理可知 $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dA=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{F})dV$

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial(\frac{1}{2}\sin 2x-xy)}{\partial x}+\frac{\partial(2y(\sin^2 x-\frac{1}{2}))}{\partial y}+\frac{\partial((4+y)z)}{\partial z}$$

$$=(\cos 2x-y)+(2\sin^2 x-1)+(4+y)$$

$$=(\cos 2x-y)+(1-\cos 2x-1)+(4+y)$$

$$=4$$

$$\therefore \iiint_V(\nabla\cdot\vec{F})dV=\iiint_V 4dV=4V=\frac{4}{3}\cdot 6^2\cdot\pi\cdot 2=96\pi$$

7. 請參考下圖，並回答下列各題：

其中，$\vec{F} = x\vec{i} + (2z - x)\vec{j} - y^2\vec{k}$， $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$，

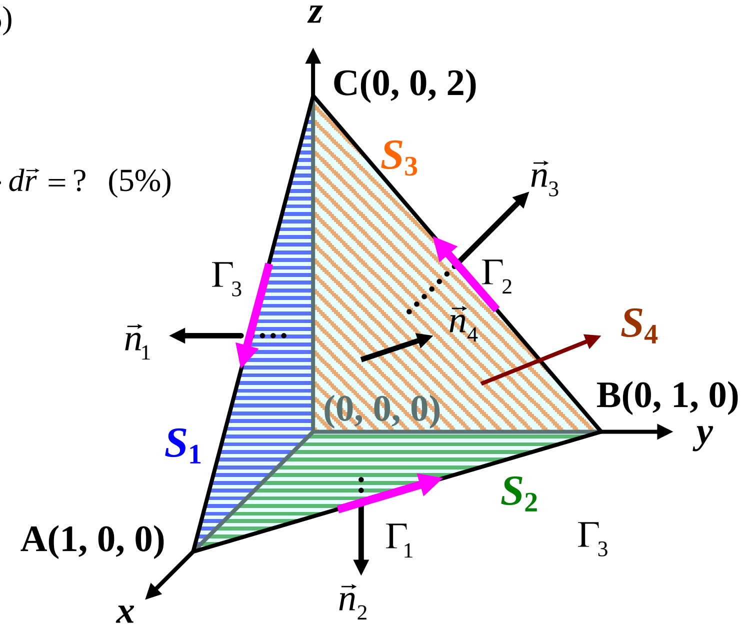
$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$

(1) $\vec{n}_4$ 為斜面 S_4 上的單位法向量，試問: $\vec{n}_4 = ?$ 並求斜面 S_4 的方程式。 (4%)

(2) 斜面 S_4 的面積為何? (4%)

(3) $\oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = ?$ (4%)

(4) 請使用線積分計算 $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$ (5%)



(1) $\vec{a} = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$

$\vec{b} = (0, 0, 2) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 2)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (2, 2, 1)$

$$\vec{n}_4 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

平面方程式為 $(x-1, y, z) \cdot (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z = 2$

(2) 斜面 S_4 的面積$= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{3}{2}$

(3) 由 Gauss 散度定理: $\oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \iiint dV = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

(4) Γ_1 : $x + y = 1 \quad \Rightarrow y = 1 - x \quad \Rightarrow dy = -dx \quad (z = 0)$

Γ_2 : $2y + z = 2 \quad \Rightarrow z = 2 - 2y \quad \Rightarrow dz = -2dy \quad (x = 0)$

Γ_3 : $2x + z = 2 \quad \Rightarrow z = 2 - 2x \quad \Rightarrow dz = -2dx \quad (y = 0)$

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\Gamma_1} xdx + (2z - x)dy + \int_{\Gamma_2} (2z - x)dy - y^2 dz$$

$$+ \int_{\Gamma_3} xdx - y^2 dz$$

$$= \int_1^0 2xdx + \int_1^0 (4 - 4y + 2y^2)dy + \int_0^1 xdx$$

$$= -\frac{19}{6}$$