國立臺灣海洋大學河海工程學系 2024 工程數學(二) 第一次大考參考

系級：＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 求下列向量梯度、散度、旋度(gradient、divergence、curl)的計算。

   $f=\cos^2 x+\sin^2 y$, $g=x+y+z$, $\vec{v}=[yz, zx, xy]$

   (1) $\nabla\cdot(\nabla f)$ (2) $\nabla\times(\nabla f)$ (3) $\nabla(fg)$ (4) $\nabla\times\vec{v}$ (16%)

2. 空間兩平面方程式分別為 $2x+4y-z=5$, $x-6y+3z=6$ 其所夾角度為何? (10%)

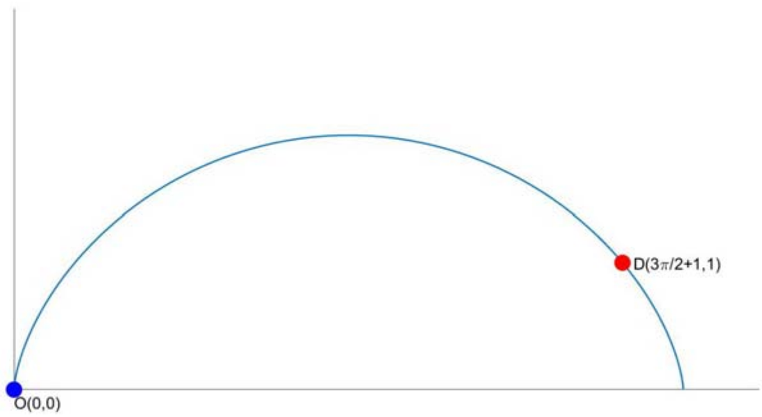
3. 給一向量場 $\vec{F}(x,y,z)=3x^2y^2\,\vec{i}+(2x^3y-e^z)\,\vec{j}+(2z-ye^z)\vec{k}$，試問 $\vec{F}$ 是否為保守場?（5%)(是或否均須說明原因)。若已知 $\vec{F}=\nabla\phi$，試問 ϕ 為何?（5%)

4. 給一擺線如下圖。$\vec{r}(t)=(t-\sin t)\,\vec{i}+(1-\cos t)\,\vec{j}$，其中 $a>0$ 且 $0\le t\le 2\pi$

   (1) 試計算 OD 之弧長。 (5%)

   (2) 給定 $P=-y$ 與 $Q=x$，試由格林定理來求擺線($t=0\rightarrow 2\pi$)與 x 軸所交之面積。 (5%)

   (3) 試求在 D 點之單位切向量、單位法向量與曲率 κ。 (9%)



5. 試驗證 Stokes 定理 $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dS$ 其中 $\vec{F}=y\,\vec{i}+(y-x)\,\vec{j}+z^2\vec{k}$

   S 為球面 $x^2+y^2+(z-4)^2=25, z\ge 4$ 之部分並且法線方向指向球面外。(18%)

6. 試計算 $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}dA$，其中 S 是由 $x^2+y^2\le 9z^2$, $0\le z\le 2$ 所構成之曲面且

   $\vec{F}=(\frac{1}{2}\sin 2x-xy)\,\vec{i}+2y(\sin^2 x-\frac{1}{2})\,\vec{j}+(4+y)z\vec{k}$ (10%)

7. 請參考下圖，並回答下列各題：

其中，$\vec{F}=x\vec{i}+(2z-x)\vec{j}-y^2\vec{k}$，$S=S_1+S_2+S_3+S_4$，

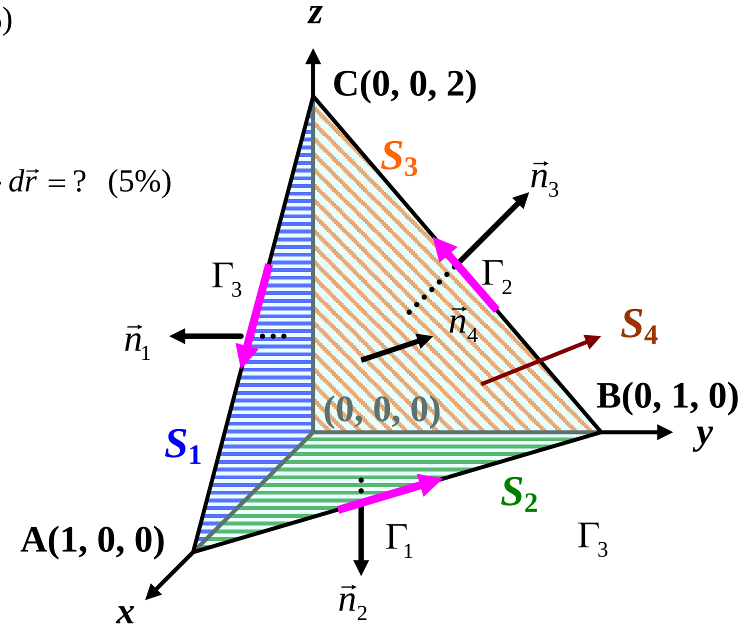
$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$

(1) $\vec{n}_4$ 為斜面 S_4 上的單位法向量，試問：$\vec{n}_4=?$ 並求斜面 S_4 的方程式。 (4%)

(2) 斜面 S_4 的面積為何？(4%)

(3) $\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=?$ (4%)

(4) 請使用線積分計算 $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=?$ (5%)



Hint:

Gauss 散度定理： $\iiint \nabla\cdot\vec{F}\,dV=\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$ **(3D)** $\iint \nabla\cdot\vec{F}\,dA=\oint \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ **(2D)**

格林定理： $\int P\,dx+Q\,dy=\iint\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

Stokes 旋度定理： $\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}$

曲率： $\kappa=\dfrac{|y''(x)|}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率：** $\tau=\left|\dfrac{d(\vec{T}(s)\times\vec{N}(s))}{ds}\right|$

二倍角公式： $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

四面體體積： $V=\dfrac{1}{3}A_0h$，**圓錐體積體積：** $V=\dfrac{1}{3}A_0h$ **(**A_0**：底面積；**h**：高)**

球座標： $x=r\sin\theta\cos\phi$，$y=r\sin\theta\sin\phi$，$z=r\cos\theta$

微小球面面積 $dA=r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$ **(**θ**:俯仰角；**ϕ**:水平角)**