

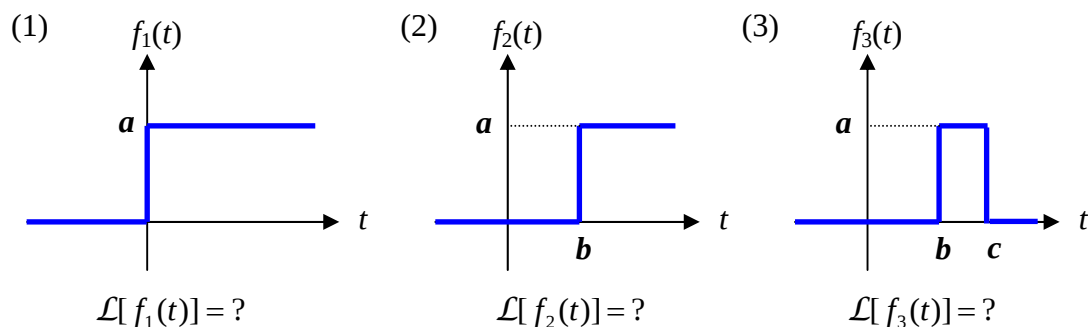
系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 試求下列 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換為何? (24%)

(1) $f(t) = \delta(t-2)$ (2) $f(t) = \sin^2 2t$ (3) $f(t) = t \sin 2t$

(4) $f(t) = \frac{1}{t} \sin 2t$ (5) $f(t) = \sin(2t - \frac{\pi}{4})$ (6) $f(t) = e^{2t} \sin 2t$

2. 試求下列各圖函數的拉普拉斯轉換為何? (12%)



3. 試求下列 $F(s)$ 的拉普拉斯逆轉換為何? (24%)

(1) $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}$ (2) $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 4)}$ (3) $F(s) = \frac{s}{(s^2 + 4)^2}$

(4) $F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4}$ (5) $F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 4}$ (6) $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 2s + 2}$

4. 試以 Laplace 轉換法求解第二類 Volterra 積分方程式

(1) $y(t) - \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau = t$ (10%)

(2) $y(t) - \int_0^t (1 + \tau)y(t - \tau) d\tau = 1 - \sinh t$ (10%)

5. 兩函數 $f(t)$ 與 $g(t)$ 的摺積(Convolution)定義式為

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau, \text{ 令 } r(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases} \text{ 試求 } r(t) * r(t),$$

並繪製此函數圖。(15%)

6. $\ddot{y}(t) + 4y(t) = g(t)$ 且 $y(0) = 0$ 與 $\dot{y}(0) = 0$ ，試以拉普拉斯轉換法解之

(1) 當 $g(t) = \sin^2 t$ 時， $y(t) = ?$ (10%)

(2) 當 $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$ 時， $y(t) = ?$ (10%)

7. 試使用拉普拉斯轉換求解下述聯立微分方程組 (15%)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + x(t) + y(t) = t^2 \\ \dot{x}(t) - \dot{y}(t) + 2x(t) = 0 \end{cases} \text{ 且 } x(0) = 1, y(0) = 2$$

8. 針對工數這門課的教學方式與如何學好這門課有何感想與建議? (10%)

拉普拉斯轉換： $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$

第一平移定理： $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

第二平移定理： $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}F(s)$

尺度變換： $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

微分函數的拉普拉斯轉換： $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

積分函數的拉普拉斯轉換： $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right] = \frac{F(s)}{s}$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^{\tau} f(x) dx d\tau\right] = \frac{F(s)}{s^2}$$

拉普拉斯轉換的微分： $\mathcal{L}[tf(t)] = (-1)\frac{d}{ds}F(s)$

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

拉普拉斯轉換的積分： $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} f(\tau) d\tau$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^2}\right] = \int_s^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f(\tau) d\tau d\gamma$$

摺積： $f(t)*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$

$$\mathcal{L}[f(t)*g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

雙曲函數： $\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$

$$\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

初值定理： $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

終值定理： $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

一階線性 ODE： $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$ 其積分因子為 $\mu = e^{\int p(x) dx}$