國立臺灣海洋大學河海工程學系 2023 工程數學(一) 第一次大考參考解答

系級：__________　　學號：__________　　姓名：__________

1. 如果地球的人口數在 1970 年為 35 億且以每年 2%的速率增加，請問何時人口數可到達 500 億。（$\ln 7 = 1.9459,\ \ln 10 = 2.3026$）(10%)

2. 試以分離變數法求解下述微分方程式:

   (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\ln x$ (8%)

   (2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$ (8%)

   (3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - 6y + 3}{x - 3y + 1}$ (8%)

3. 已知微分方程式為 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x+1}{x}y = e^{-2x}$

   (1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(8%)
   (若為線性，直接求解；若非線性，則轉換成線性，再求解)

   (2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(8%)
   (若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

4. 已知微分方程式為 $y' - \dfrac{3}{x}y = x^4 y^{\frac{1}{3}}$

   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

   (2) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ (8%)

5. 已知微分方程式為 $\dfrac{dy}{dx} = -(1 + x + x^2) - (2x+1)y - y^2$

   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

   (2) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ (8%)

6. 已知微分方程式為 $y = xy' + (y')^3$

   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

   (2) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ (8%)

7. 試解下列各微分方程

   (1) $y' + \dfrac{2x\sin y + y^3 e^x}{x^2\cos y + 3y^2 e^x} = 0$ (8%)

   (2) $x^2 (y')^2 + 4xyy' + 3y^2 = 0$ (8%)

<參考解答>

1. 如果地球的人口數在 1970 年為 35 億且以每年 2%的速率增加，請問何時人口數可到達 500 億。（$\ln 7 = 1.9459$, $\ln 10 = 2.3026$）**(10%)**

如果 y 為人口數，則可知其數學模式為 $\dfrac{dy}{dt} = ky = 0.02y$

$\therefore \dfrac{dy}{y} = 0.02dt \Rightarrow y(t) = Ce^{0.02t}$

又 $y(0) = 35 \quad \Rightarrow C = 35 \quad \Rightarrow y(t) = 35e^{0.02t}$

又 $y(k) = 500 \quad \Rightarrow 500 = 35e^{0.02k} \quad \Rightarrow e^{0.02k} = \dfrac{500}{35} = \dfrac{100}{7}$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln 100 - \ln 7}{0.02} = \frac{2 \cdot 2.3026 - 1.9459}{0.02} \approx 133$$

大約經過 133 年後，即 2103 年時，人可口達 500 億。

2. 試以分離變數法求解下述微分方程式:

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\ln x$ **(8%)**

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$ **(8%)**

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - 6y + 3}{x - 3y + 1}$ **(8%)**

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\ln x \quad \Rightarrow \int \dfrac{1}{y}dy = \int \dfrac{1}{x}\ln x\, dx \quad \Rightarrow \ln|y| = \dfrac{1}{2}(\ln|x|)^2 + \ln C$

$$\Rightarrow y = Ce^{\frac{1}{2}(\ln|x|)^2}$$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$ ⟶ 齊次型 ODE

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} - 1 + \dfrac{y}{x}$

令 $u = \dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow y = ux \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$ 代回 ODE

可得 $x\dfrac{du}{dx} + u = \dfrac{1}{u} - 1 + u \quad \Rightarrow x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1-u}{u}$

$$\Rightarrow -\int \frac{u}{u-1}du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow -(u + \ln|u-1|) = \ln|x| - \ln C$$

$$\Rightarrow e^u \cdot x(u-1) = C$$

$$\Rightarrow (y - x)e^{\frac{y}{x}} = C$$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-6y+3}{x-3y+1}$

令 $u=x-3y \quad \Rightarrow \frac{du}{dx}=1-3\frac{dy}{dx}$ 代回 ODE

可得 $\frac{1}{3}(1-\frac{du}{dx})=\frac{2u+3}{u+1} \quad \Rightarrow \frac{du}{dx}=1-\frac{6u+9}{u+1}=-\frac{5u+8}{u+1}$

$$\Rightarrow \int \frac{u+1}{5u+8}du=-\int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}(u-\frac{3}{5}\ln|u+\frac{8}{5}|)=-x+C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}(x-3y)-\frac{3}{25}\ln|x-3y+\frac{8}{5}|+x=C$$

or $\frac{2}{5}(x-3y)-\frac{1}{25}\ln|x-3y+\frac{8}{5}|+y=C$

3. 已知微分方程式為 $\frac{dy}{dx}+\frac{2x+1}{x}y=e^{-2x}$

(1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(8%)
(若為線性，直接求解；若非線性，則轉換成線性，再求解)

(2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(8%)
(若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

(1) $\frac{dy}{dx}+\frac{2x+1}{x}y=e^{-2x}$ 此為一階線性微分方程式

積分因子 $\mu=e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{2x+1}{x}dx}=e^{\int (2+\frac{1}{x})dx}=e^{2x+\ln x}=x\cdot e^{2x}$

同乘積分因子後可得 $x\cdot e^{2x}\frac{dy}{dx}+e^{2x}(2x+1)y=x \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}(x\cdot e^{2x}y)=x$

$$\Rightarrow x\cdot e^{2x}y=\frac{1}{2}x^2+C$$

$$\Rightarrow x\cdot e^{2x}y-\frac{1}{2}x^2=C$$

(2) $\frac{dy}{dx}+\frac{2x+1}{x}y=e^{-2x} \quad \Rightarrow [(2x+1)y-xe^{-2x}]dx+xdy=0$

令 $M=(2x+1)y-xe^{-2x} \quad \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2x+1$

$N=x \quad \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=1$

由判斷式 $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ 可知，此為非正合 ODE

由 $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=2$ 可知 μ 為 $\mu(x)$

$\therefore\ \frac{1}{\mu}d\mu=\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})dx \quad \Rightarrow \int\frac{1}{\mu}d\mu=\int\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})dx$

$$\Rightarrow \ln|\mu|=\int 2\,dx=2x$$

$$\Rightarrow \mu=e^{2x}$$

同乘積分因子後可得 $e^{2x}[(2x+1)y-xe^{-2x}]dx+xe^{2x}dy=0$，此為正合 ODE

$\therefore$ 可知 $\overline{M}=\frac{\partial\phi}{\partial x}=(2x+1)e^{2x}y-x \quad \Rightarrow \phi=xe^{2x}-\frac{1}{2}x^2+f(y)$

$\overline{N}=\frac{\partial\phi}{\partial y}=xe^{2x} \quad \Rightarrow \phi=xe^{2x}y+g(x)$

比較後可得 $\phi(x,y)=xe^{2x}y-\frac{1}{2}x^2=C$

4. 已知微分方程式為 $y'-\frac{3}{x}y=x^4y^{\frac{1}{3}}$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 試求此微分方程式之解 $y(x)=?$ **(8%)**

(1) $y'-\frac{3}{x}y=x^4y^{\frac{1}{3}}$ 此為 Bernoulli ODE

(2) $y'-\frac{3}{x}y=x^4y^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow y^{-\frac{1}{3}}y'-\frac{3}{x}y^{\frac{2}{3}}=x^4$

令 $u=y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow u'=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'$ 代回 ODE 可得

$\frac{3}{2}u'-\frac{3}{x}u=x^4 \quad \Rightarrow u'-\frac{2}{x}u=\frac{2}{3}x^4 \ \rightarrow$ 此為一階線性 ODE

積分因子為 $\mu=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=\frac{1}{x^2}$

同乘積分因子後可得 $\Rightarrow \frac{1}{x^2}u'-\frac{2}{x^3}u=\frac{2}{3}x^2$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{1}{x^2}u)=\frac{2}{3}x^2$$

$$\Rightarrow \int d(\frac{1}{x^2}u)=\int\frac{2}{3}x^2dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}u=\frac{2}{9}x^3+C$$

$$\Rightarrow y^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{9}x^5+Cx^2 \qquad \Rightarrow y=(\frac{2}{9}x^5+Cx^2)^{\frac{3}{2}}$$

5. 已知微分方程式為 $\dfrac{dy}{dx}=-(1+x+x^2)-(2x+1)y-y^2$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 試求此微分方程式之解 $y(x)=$? **(8%)**

(1) $\dfrac{dy}{dx}=-(1+x+x^2)-(2x+1)y-y^2$ 此為 Riccati ODE

(2) 由觀察得一解 $S=-x$

令 $y=S+\dfrac{1}{V}=-x+\dfrac{1}{V}$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-1-\dfrac{V'}{V^2}$ 代回 ODE 可得

$$-1-\frac{V'}{V^2}=-(1+x+x^2)-(2x+1)(-x+\frac{1}{V})-(-x+\frac{1}{V})^2$$

$\Rightarrow V'-V=1$ ⟶ 此為一階線性 ODE

可知其積分因子為 $\mu=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int dx}=e^{-x}$

同乘積分因子後可得 $e^{-x}V'-e^{-x}V=e^{-x}$ $\Rightarrow \dfrac{d}{dx}(e^{-x}V)=e^{-x}$

$\Rightarrow e^{-x}V=-e^{-x}+C$

$\Rightarrow V=-1+Ce^{x}$

$\therefore\ y=S+\dfrac{1}{V}=-x+\dfrac{1}{Ce^x-1}$

6. 已知微分方程式為 $y=xy'+(y')^3$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 試求此微分方程式之解 $y(x)=$? **(8%)**

(1) $y=xy'+(y')^3$ 此為 Clairaut ODE

(2) $y=xy'+(y')^3$

令 $p=y'$ $\Rightarrow y=xp+p^3$

將兩邊對 x 微分可得 $y'=p+xp'+3p^2p'$

$\Rightarrow p=p+xp'+3p^2p'$

$\Rightarrow (x+3p^2)p'=0$

由 $p'=0$ $\Rightarrow p=c$ $\Rightarrow y'=c$ 代回 $y=xy'+(y')^3$

可得 $y=xc+c^3$（通解）

由 $x+3p^2=0$ $\Rightarrow x=-3p^2$ $\Rightarrow x=-3(y')^2$ 代回 $y=xy'+(y')^3$

可得 $y=-2(y')^3$ $\Rightarrow (y')^3=-\dfrac{1}{2}y$ $\Rightarrow y'=(-\dfrac{1}{2}y)^{\frac{1}{3}}$ 代回 $y=xy'+(y')^3$

可得 $y=x(-\dfrac{1}{2}y)^{\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{2}y$ $\Rightarrow \dfrac{3}{2}y=x(-\dfrac{1}{2}y)^{\frac{1}{3}}$ $\Rightarrow (\dfrac{3}{2})^3y^3=-\dfrac{1}{2}x^3y$

$\Rightarrow 27y^2=-4x^3$ (特解)

7. 試解下列各微分方程

(1) $y' + \dfrac{2x\sin y + y^3 e^x}{x^2\cos y + 3y^2 e^x} = 0$ **(8%)**

(2) $x^2 (y')^2 + 4xyy' + 3y^2 = 0$ **(8%)**

(1) $y' + \dfrac{2x\sin y + y^3 e^x}{x^2\cos y + 3y^2 e^x} = 0 \quad \Rightarrow (2x\sin y + y^3 e^x)dx + (x^2\cos y + 3y^2 e^x)dy = 0$

令 $M = 2x\sin y + y^3 e^x \quad \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x\cos y + 3y^2 e^x$

$N = x^2\cos y + 3y^2 e^x \quad \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x\cos y + 3y^2 e^x$

由判斷式 $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ 可知，此為正合 ODE

$\therefore$ 可知 $M = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2x\sin y + y^3 e^x \quad \Rightarrow \phi = x^2\sin y + y^3 e^x + f(y)$

$N = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x^2\cos y + 3y^2 e^x \quad \Rightarrow \phi = x^2\sin y + y^3 e^x + g(x)$

比較後可得 $\phi(x,y) = x^2\sin y + y^3 e^x = C$

(2) $x^2 (y')^2 + 4xyy' + 3y^2 = 0 \quad \Rightarrow (xy' + y)(xy' + 3y) = 0$

當 $xy' + y = 0 \quad \Rightarrow y = \dfrac{C_1}{x} \quad \Rightarrow y - \dfrac{C_1}{x} = 0$

當 $xy' + 3y = 0 \quad \Rightarrow y = \dfrac{C_2}{x^3} \quad \Rightarrow y - \dfrac{C_2}{x^3} = 0$

$\therefore$ 此 ODE 之解為 $(y - \dfrac{C_1}{x})(y - \dfrac{C_2}{x^3}) = 0$