國立臺灣海洋大學河海工程學系 2023 工程數學(一) 期末考參考解答

系級：____________ 學號：____________ 姓名：____________

1. 設 A, B, C 是 n 階方陣。若 $ABC = I$，判斷下列各式是否正確。並對正確的式子給與證明。 (10%)

   (1) $ACB = I$ (2) $BCA = I$ (3) $CBA = I$ (4) $CAB = I$

2. 試求 $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = ?$ (10%)

3. $A = \begin{bmatrix} x & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，又 $\det(AB) = 60$，試問 $x = ?$ (10%)

4. 已知 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$，試問 $A^n = ?$ (10%)

5. 已知 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$，試問:

   (1) $\lambda = ?$ 此時 $\operatorname{rank}(A) = 1$。 (5%)

   (2) $\lambda = ?$ 此時 $\operatorname{rank}(A) = 2$。 (5%)

6. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，向量 $x = \begin{Bmatrix} b \\ c \\ 1 \end{Bmatrix}$ 為 A 的其中一個特徵值 2 所對應的特徵向量，試求 a, b 與 c 為何? (10%)

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，試求 $A^{-1} = ?$ (10%)

8. 利用 Gram-Schmidt 正交化法，試由向量組 $x^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $x^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ 建構出一組單位正交向量集 $\{y^1 \ y^2 \ y^3\}$。 (10%)

9. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$，試問:

(1) A 的特徵方程為何? (3%)

(2) 試由 Cayley-Hamilton 定理求 $A^{100}-3A^{55}=?$ (6%)

(3) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ ，則 $p=?$, $q=?$, $r=?$ (6%)

(4) 試將 A 化為 Jordan form，即 $A=SJS^{-1}$ (6%)

(5) 試以 Jordan form 法計算 $A^{100}-3A^{55}=?$ (6%)

(6) 若 $A^{-1}=S\bar{J}S^{-1}$ ，則 $\bar{J}=?$ (3%)

10. 給方程式 $x_1^2-12x_1x_2+x_2^2=70$ ，試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T=[y_1\ y_2]$，試問: (1) 其轉換矩陣為何? (6%)

(2) 此方程代表何種圓錐曲線? (2%)

(3) $Q=x_1^2-12x_1x_2+x_2^2$ 為何種型式二次式? (2%)
(正定、負定或是不定型)

11. 試解: $\begin{cases} y_1''+3y_1-3y_2=10+3\sin t \\ y_2''-2y_1+4y_2=-10+2\sin t\end{cases}$ 且 $y_1(0)=y_2(0)=y_1'(0)=y_2'(0)=0$ 。

(10%)

參考解答:

1. 設 A, B, C 是 n 階方陣。若 $ABC=I$ ，判斷下列各式是否正確。並對正確的式子給與證明。 (10%)

   (1) $ACB=I$ (2) $BCA=I$ (3) $CBA=I$ (4) $CAB=I$

$ABC=I \quad \Rightarrow BC=A^{-1}$ 又 $AA^{-1}=A^{-1}A=I \quad \Rightarrow BCA=I$

$ABC=I \quad \Rightarrow AB=C^{-1}$ 又 $C^{-1}C=CC^{-1}=I \quad \Rightarrow CAB=I$

$\therefore$ (2)、(4)為正確

2. 試求 $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = ?$ (10%)

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 3 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 3 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 3 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(任兩行成比例)}$$

3. $A=\begin{bmatrix} x & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，又 $\det(AB)=60$ ，試問 $x=?$ (10%)

$$\det(A)=\begin{vmatrix} x & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4x+6, \quad \det(B)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=10$$

$\det(AB)=\det(A)\times\det(B)=60 \quad \Rightarrow x=0$

4. 已知 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$，試問 $A^n=?$ (10%)

$$A^n=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dfrac{n(n-1)\lambda^{n-2}}{2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}$$

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，試問:

(1) $\lambda=?$ 此時 $\text{rank}(A)=1$ 。 (5%)
(2) $\lambda=?$ 此時 $\text{rank}(A)=2$ 。 (5%)

當 $\text{rank}(A)=1$ 或 $\text{rank}(A)=2$ 時，表示矩陣 A 不滿秩，即 $\det(A)=0$

$$\det(A)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0 \quad \Rightarrow \lambda=1 \text{ or } -2$$

當 $\lambda=1$ 時， $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A)=1$

當 $\lambda=-2$ 時， $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A)=2$

6. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & a\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，向量 $x=\begin{Bmatrix}b\\ c\\ 1\end{Bmatrix}$ 為 A 的其中一個特徵值 2 所對應的特徵向量，試求 a, b 與 c 為何? (10%)

$$Ax=\lambda x \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & a\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}b\\ c\\ 1\end{Bmatrix}=2\begin{Bmatrix}b\\ c\\ 1\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} b+2c&=2b & \text{...(1)}\\ 3b+4c+a&=2c & \text{...(2)}\\ b+c+1&=2 & \text{...(3)}\end{aligned}$$

由(1)、(3) 可得 $c=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$ 代回(2)可得 $a=-\dfrac{8}{3}$

7. $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，試求 $A^{-1}=?$ (10%)

$\det(A)=1$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

8. 利用 Gram-Schmidt 正交化法，試由向量組 $x^1=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}^T$, $x^2=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}^T$, $x^3=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}^T$ 建構出一組單位正交向量集 $\{y^1\ y^2\ y^3\}$。 (10%)

由 Gram-Schmidt 正交化法，取 $y^1=\dfrac{x^1}{|x^1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}^T$

$$v^2=x^2-<y^1,x^2>y^1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}^T \quad \Rightarrow y^2=\frac{v^2}{|v^2|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1&1&2\end{bmatrix}^T$$

$$v^3=x^3-<y^1,x^3>y^1-<y^2,x^3>y^2=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}^T$$

$$\Rightarrow y^3=\frac{v^3}{|v^3|}=\frac{1}{\sqrt{3.}}\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}^T$$

9. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$，試問:

(1) A 的特徵方程為何? (3%)

(2) 試由 Cayley-Hamilton 定理求 $A^{100}-3A^{55}=?$ (6%)

(3) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ ，則 $p=?$，$q=?$，$r=?$ (6%)

(4) 試將 A 化為 Jordan form，即 $A=PJP^{-1}$ (6%)

(5) 試以 Jordan form 法計算 $A^{100}-3A^{55}=?$ (6%)

(6) 若 $A^{-1}=P\bar{J}P^{-1}$，則 $\bar{J}=?$ (3%)

(1) $\det(A-\lambda I)=0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & -2\\ 1 & -\lambda & -3\\ 1 & -1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)^2=0$$
$$\Rightarrow \lambda=1,-1,-1$$

(2) 由 Cayley-Hamilton 定理可知 $C(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1$

$$\Rightarrow C(A)=A^3+A^2-A-I$$

又 $C(1)=0$，$C(-1)=0$，$C'(-1)=0$

$f(A)=A^{100}-3A^{55}=Q(A)\cdot C(A)+pA^2+qA+rI$

$f(\lambda)=\lambda^{100}-3\lambda^{55}=Q(\lambda)\cdot C(\lambda)+p\lambda^2+q\lambda+r$

由 $\lambda=1$ 可得 $f(1)=-2=p+q+r$ ... (1)

由 $\lambda=-1$ 可得 $f(-1)=4=p-q+r$ ... (2)

微分可得 $f'(\lambda)=100\lambda^{99}-165\lambda^{54}$

$$=Q'(\lambda)\cdot C(\lambda)+Q'(\lambda)\cdot C'(\lambda)+2p\lambda+q$$

由 $\lambda=-1$ 可得 $f'(-1)=-265=-2p+q$ ... (3)

由(1)、(2)、(3)可得 $p=131$，$q=-3$，$r=-130$

$$\therefore \quad f(A)=131A^2-3A-130I=\begin{bmatrix}-526 & 6 & 1054\\ -265 & 1 & 533\\ -265 & 3 & 531\end{bmatrix}$$

(3) $A^3+A^2-A-I=0 \quad \Rightarrow A^{-1}(A^3+A^2-A-I)=0$

$$\Rightarrow A^{-1}=A^2+A-I$$

$\therefore \quad p=1$，$q=1$，$r=-1$

$$A^{-1}=A^2+A-I=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

(4) 當 $\lambda_1 = 1 \;\Rightarrow (A-\lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \;\Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1 \quad \Rightarrow (A-\lambda_2 I)x = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow x^2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

因為 2 個特徵值只對應到一個特徵向量，故須引入一條廣義特徵向量

$$Ax^3 = \lambda_2 x^3 + x^2 \;\Rightarrow (A-\lambda_3 I)x^3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^3 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

取 $t = 0$，可得 $x^3 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\therefore \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = PJP^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

(5) $A^{100} - 3A^{55} = PJ_1P^{-1} \quad \Rightarrow J_1 = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & f'(\lambda_2) \\ 0 & 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow J_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -265 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{100}-3A^{55}=PJ_1P^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&1\\-1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&4&-265\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&1&1\\2&0&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-526&6&1054\\-265&1&533\\-265&3&531\end{bmatrix}$$

(6) $A^{-1}=S\bar{J}S^{-1}\quad\Rightarrow\bar{J}=\begin{bmatrix}f(\lambda_1)&0&0\\0&f(\lambda_2)&f'(\lambda_2)\\0&0&f(\lambda_2)\end{bmatrix}\ \Rightarrow\bar{J}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$$A^{-1}=S\bar{J}S^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&1\\-1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&1&1\\2&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-2&6\\-1&0&1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$$

10. 給方程式 $x_1^2-12x_1x_2+x_2^2=70$，試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T=[y_1\ y_2]$，試問: (1) 其轉換矩陣為何? (6%)

(2) 此方程代表何種圓錐曲線? (2%)

(3) $Q=x_1^2-12x_1x_2+x_2^2$ 為何種型式二次式? (2%)
(正定、負定或是不定型)

(1) $x_1^2-12x_1x_2+x_2^2=70\ \Rightarrow\mathbf{x}^T\begin{bmatrix}1&-6\\-6&1\end{bmatrix}\mathbf{x}=72$ 其中 $\mathbf{x}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}$

由 $|A-\lambda I|=0\quad\Rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda&-6\\-6&1-\lambda\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\lambda=7$ or -5

當 $\lambda=7$ 時，$\begin{bmatrix}-6&-6\\-6&-6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\ \Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$

當 $\lambda=-5$ 時，$\begin{bmatrix}6&-6\\-6&6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\ \Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$

$\therefore\ s=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow s^{-1}=s^T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

令 $y=s^Tx$

$x^T\begin{bmatrix}1&-6\\-6&1\end{bmatrix}x=70\quad\Rightarrow x^Ts\begin{bmatrix}7&0\\0&-5\end{bmatrix}s^Tx=70$

$$\Rightarrow y^T \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} y = 70$$

$$\Rightarrow 7y_1^2 - 5y_2^2 = 70$$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{(\sqrt{10})^2} - \frac{y_2^2}{(\sqrt{14})^2} = 1$$

(2) 此為雙曲線

(3) $\because \ \lambda_1 > 0, \ \lambda_2 < 0$

$\therefore \ Q = x_1^2 - 12x_1x_2 + x_2^2$ 為不定型二次式

11. 試解: $\begin{cases} y_1'' + 3y_1 - 3y_2 = 10 + 3\sin t \\ y_2'' - 2y_1 + 4y_2 = -10 + 2\sin t \end{cases}$ 且 $y_1(0) = y_2(0) = y_1'(0) = y_2'(0) = 0$ 。

(10%)

$$\begin{cases} y_1'' + 3y_1 - 3y_2 = 10 + 3\sin t \\ y_2'' - 2y_1 + 4y_2 = -10 + 2\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10 + 3\sin t \\ -10 + 2\sin t \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow y'' = Ax + z$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \ \Rightarrow \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \ \Rightarrow \lambda = -1 \text{ or } -6$$

當 $\lambda = -1 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda = -6 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \Rightarrow x^2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$\therefore \ D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \ S = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \ \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$\therefore \ A = SDS^{-1}$

令 $y = S\bar{y} \quad \Rightarrow S\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = AS\bar{y} + z \ \Rightarrow \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} = S^{-1}AS\bar{y} + S^{-1}z$

$$\therefore \ \begin{Bmatrix} \bar{y}_1'' \\ \bar{y}_2'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 + 3\sin t \\ -10 + 2\sin t \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{y}_1'' = -\bar{y}_1 + \sin t \\ \bar{y}_2'' = -6\bar{y}_2 - 10 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \bar{y}_1'' + \bar{y}_1 = \sin t \\ \bar{y}_2'' + 6\bar{y}_2 = -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{y}_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \\ \bar{y}_2 = c_3 \cos\sqrt{6}\, t + c_4 \sin\sqrt{6}\, t - \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3\bar{y}_1 - \bar{y}_2 \\ 2\bar{y}_1 + \bar{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3c_1 \cos t + 3c_2 \sin t - \frac{3}{2} t \cos t - c_3 \cos\sqrt{6}\, t - c_4 \sin\sqrt{6}\, t + \frac{5}{3} \\ 2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t - t \cos t + c_3 \cos\sqrt{6}\, t + c_4 \sin\sqrt{6}\, t - \frac{5}{3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3c_1 - c_3 + \frac{5}{3} \\ 2c_1 + c_3 - \frac{5}{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow c_1 = 0,\ c_3 = \frac{5}{3}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1'(0) \\ y_2'(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3c_2 - \frac{3}{2} - \sqrt{6}\, c_4 \\ 2c_2 - 1 + \sqrt{6}\, c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2},\ c_4 = 0$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2} \sin t - \frac{3}{2} t \cos t - \frac{5}{3} \cos\sqrt{6}\, t + \frac{5}{3} \\ \sin t - t \cos t + \frac{5}{3} \cos\sqrt{6}\, t - \frac{5}{3} \end{Bmatrix}$$