

系級：\_\_\_\_\_ 學號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

1. 設  $A, B, C$  是  $n$  階方陣。若  $ABC = I$ ，判斷下列各式是否正確。並對正確的式子給與證明。(10%)

(1)  $ACB = I$     (2)  $BCA = I$     (3)  $CBA = I$     (4)  $CAB = I$

2. 試求 
$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = ? \quad (10\%)$$

3.  $A = \begin{bmatrix} x & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & x \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 又  $\det(AB) = 60$ , 試問  $x = ?$  (10%)

4. 已知  $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ , 試問  $A^n = ?$  (10%)

5. 已知  $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ , 試問:

(1)  $\lambda = ?$  此時  $\text{rank}(A) = 1$ 。(5%)

(2)  $\lambda = ?$  此時  $\text{rank}(A) = 2$ 。(5%)

6. 已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 向量  $x = \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$  為  $A$  的其中一個特徵值 2 所對應的特徵向

量, 試求  $a, b$  與  $c$  為何? (10%)

7.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 試求  $A^{-1} = ?$  (10%)

8. 利用 Gram-Schmidt 正交化法, 試由向量組  $x^1 = [1 \ 1 \ 0]^T$ ,  $x^2 = [0 \ 1 \ 1]^T$ ,

$x^3 = [1 \ 0 \ 1]^T$  建構出一組單位正交向量集  $\{y^1 \ y^2 \ y^3\}$ 。(10%)

9. 已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ ，試問：

- (1)  $A$  的特徵方程為何? (3%)
- (2) 試由 Cayley-Hamilton 定理求  $A^{100} - 3A^{55} = ?$  (6%)
- (3) 若  $A^{-1} = pA^2 + qA + rI$ ，則  $p = ?$ ,  $q = ?$ ,  $r = ?$  (6%)
- (4) 試將  $A$  化為 Jordan form，即  $A = SJS^{-1}$  (6%)
- (5) 試以 Jordan form 法計算  $A^{100} - 3A^{55} = ?$  (6%)
- (6) 若  $A^{-1} = S\bar{J}S^{-1}$ ，則  $\bar{J} = ?$  (3%)

10. 給方程式  $x_1^2 - 12x_1x_2 + x_2^2 = 70$ ，試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸，即將舊座標向量  $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2]$  轉換至新座標向量  $\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2]$ ，試問：(1) 其轉換矩陣為何? (6%)

(2) 此方程代表何種圓錐曲線? (2%)

(3)  $Q = x_1^2 - 12x_1x_2 + x_2^2$  為何種型式二次式? (2%)  
(正定、負定或是不定型)

11. 試解： 
$$\begin{cases} y_1'' + 3y_1 - 3y_2 = 10 + 3\sin t \\ y_2'' - 2y_1 + 4y_2 = -10 + 2\sin t \end{cases} \quad \text{且} \quad y_1(0) = y_2(0) = y_1'(0) = y_2'(0) = 0。$$

(10%)