國立臺灣海洋大學河海工程學系 2023 工程數學(二) 第二次大考參考解答

系級：________________ 學號：______________ 姓名：_____________

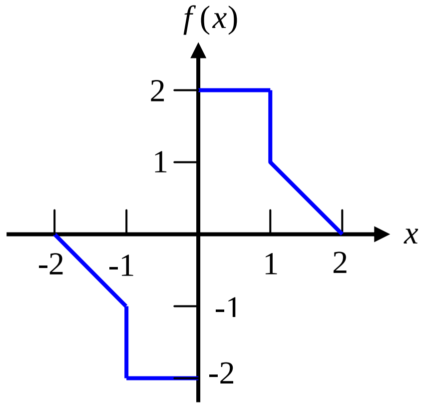
1. (a) $f(x)=1-|x|$，$-2\le x\le 2$ 且 $f(x)=0$，$|x|>2$

   (b) $g(x)=1-|x|$，$-2\le x\le 2$ 且 $g(x)=g(x+4)$

   若欲將上述兩函數展成傅立葉表示式(傅立葉級數、傅立葉積分)，

   試問所對應的展開式分別為何並說明理由? (6%)

2. 給一週期函數如下圖所示，已知其週期為 4，試求此函數 $f(x)$ 之傅立葉級數，並列出前三個係數(a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)之值為何? (12%)



3. 給一函數 $f(x)=x$ 其中 $-2<x<2$ 並且又有 $f(x)=f(x+4)$
   (1) 請畫出函數 $f(x)$ 之圖形。(2%)
   (2) 試問此函數為奇函數或是偶函數? (2%) 週期 $T=?$ (2%)
   (3) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(6%)
   (4) 試問: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=?$ (5%)
   (5) 試問: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=?$ (5%)

4. 已知若 $x>0$ 則 $f(x)=e^{-x}$，若 $x<0$ 則 $f(x)=0$，試求 $f(x)$ 之傅立葉積分，並求 $\int_0^\infty \frac{\cos 2\omega+\omega\sin 2\omega}{1+\omega^2}d\omega$ 之值。 (12%)

5. 已知以 5 為週期的函數 $f(x)$ 在 $0\le x<5$ 上有 $f(x)=e^{-x}$，試將此函數展成複數形式之傅立葉級數。(12%)

6. (1) 試求函數 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 與 $g(x)=e^{-a|x|}$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$ 與 $G(\omega)$，其中 $a>0$。 (10%)
   (2) 試求 $\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}]=?$ (8%)
   (3) 試以傅立葉轉換解 $y'-4y=e^{-4x}u(x)$。 (8%)
   (4) 試以傅立葉轉換解 $y''(x)+5y'(x)+6y(x)=\delta(x-3)$ (10%)

傅立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傅立葉積分： $f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx,\ B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x},\quad \text{其中 } \omega_n=\frac{2n\pi}{T},\ c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$$

傅立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$

Convolution : $f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式: $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\beta\sin\alpha$

參考解答:

1. (a) $f(x)=1-|x|$ ，$-2\le x\le 2$ 且 $f(x)=0$ ，$|x|>2$

(b) $g(x)=1-|x|$ ，$-2\le x\le 2$ 且 $g(x)=g(x+4)$

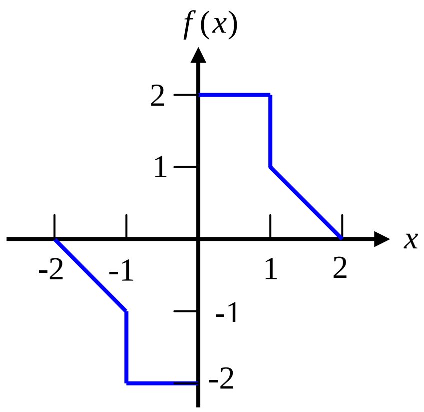
若欲將上述兩函數展成傅立葉表示式(傅立葉級數、傅立葉積分)，

試問所對應的展開式分別為何並說明理由? (6%)

(a) $f(x)$ 為非週期函數，所以取傅立葉積分

(b) $g(x)$ 為週期函數，所以取傅立葉級數

2. 給一週期函數如下圖所示，已知其週期為 4，試求此函數 $f(x)$ 之傅立葉級數，並列出前三個係數(a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)之值為何? (12%)



由圖可知此為奇函數，週期為 $T=4$ 且 $a_0=a_n=0$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\int_0^1 2\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1-\frac{2}{n\pi}(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2$$

$$=\frac{4}{n\pi}(1-\cos\frac{n\pi}{2})+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}(\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2})$$

$$=\frac{4}{n\pi}-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\therefore\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n\pi}-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2})\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$\therefore a_0=a_1=a_2=a_3=0,\ b_1=\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi^2},\ b_2=\frac{3}{\pi},\ b_3=\frac{4}{3\pi}-\frac{4}{9\pi^2}$$

3. 給一函數 $f(x)=x$ 其中 $-2<x<2$ 並且又有 $f(x)=f(x+4)$

(1) 請畫出函數 $f(x)$ 之圖形。(2%)

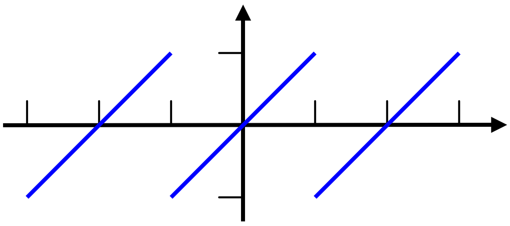
(2) 試問此函數為奇函數或是偶函數? (2%) 週期 $T=?$ (2%)

(3) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(6%)

(4) 試問: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=?$ (5%)

(5) 試問: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=?$ (5%)

(1)



(2) 由圖可知此為奇函數，週期為 $T=4$ 且 $a_0=a_n=0$

(3) $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2}$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi=\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

(4) 當 $x=1$ 時

$$f(1)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{4}{\pi}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots)$$

$$\Rightarrow 1=\frac{4}{\pi}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots)$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}$$

(5) 由 Parseval 恆等式可知 $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(x)dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}x^2dx=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

4. **已知若** $x>0$ **則** $f(x)=e^{-x}$ **，若** $x<0$ **則** $f(x)=0$ **，試求** $f(x)$ **之傅立葉積分，並求** $\int_0^\infty \frac{\cos 2\omega+\omega\sin 2\omega}{1+\omega^2}d\omega$ **之值。 (12%)**

$$f(x)=\int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

且 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$

$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}$

$$\therefore\quad f(x)=\int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$$

$$\therefore\quad \int_0^\infty \frac{\cos 2\omega+\omega\sin 2\omega}{1+\omega^2}d\omega=\pi\cdot f(2)=\pi\cdot e^{-2}$$

5. **已知以 5 為週期的函數** $f(x)$ **在** $0\le x<5$ **上有** $f(x)=e^{-x}$ **，試將此函數展成複數形式之傅立葉級數。(12%)**

由 $f(x)=f(x+5)$ 可知週期 $T=5$

$$\therefore \omega_n=\frac{2n\pi}{T}=\frac{2n\pi}{5}$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\omega_n x}dx=\frac{1}{5}\int_0^5 e^{-x}e^{-i\frac{2n\pi}{5}x}dx$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^5 e^{-(1+i\frac{2n\pi}{5})x}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\frac{1}{1+i\frac{2n\pi}{5}}e^{-(1+i\frac{2n\pi}{5})x}\Bigg|_0^5$$

$$=\frac{1}{5}\frac{1}{1+i\frac{2n\pi}{5}}[1-e^{-(1+i\frac{2n\pi}{5})5}]$$

$$=\frac{1}{5+i2n\pi}(1-e^{-5})$$

$$\therefore\quad f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{5+i2n\pi}(1-e^{-5})e^{i\frac{2n\pi x}{5}}$$

6. (1) 試求函數 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 與 $g(x)=e^{-a|x|}$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$ 與 $G(\omega)$，其中 $a>0$。 **(10%)**

(2) 試求 $\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}]=?$ **(8%)**

(3) 試以傅立葉轉換解 $y'-4y=e^{-4x}u(x)$。 **(8%)**

(4) 試以傅立葉轉換解 $y''(x)+5y'(x)+6y(x)=\delta(x-3)$ **(10%)**

(1) $\mathcal{F}[f(x)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax}\cdot u(x)e^{-i\omega x}\,dx=\int_{0}^{\infty}e^{-(a+i\omega)x}\,dx$

$$=-\frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{a+i\omega}$$

$$g(x)=e^{-a|x|}=\begin{cases}e^{-ax}, & x>0\\ e^{ax}, & x<0\end{cases}$$

$$G(\omega)=\mathcal{F}[g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{ax}e^{-i\omega x}\,dx+\int_{0}^{\infty}e^{-ax}e^{-i\omega x}\,dx$$

$$=\frac{1}{a-i\omega}e^{(a-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{-1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)t}\Big|_0^\infty$$

$$=\frac{1}{a-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}$$

$$=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

(2) $h(x)=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{1+i\omega}]*\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{2+i\omega}]$

$\Rightarrow h(x)=e^{-x}u(x)*e^{-2x}u(x)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau}u(\tau)\cdot e^{-2(x-\tau)}u(x-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-\tau}\cdot e^{-2(x-\tau)}u(x-\tau)\,d\tau$$

當 $x<0$

$\because\ x-\tau<0\quad\Rightarrow u(x-\tau)=0$

$\therefore\ f(x)=0$

當 $x>0$

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}e^{-\tau}\cdot e^{-2(x-\tau)}u(x-\tau)\,d\tau=\int_{0}^{x}e^{-\tau}\cdot e^{-2(x-\tau)}\,d\tau$$

$$= \int_0^x e^{\tau} \cdot e^{-2x}\, d\tau$$

$$= e^{-2x}(e^{x} - e^{0}) = e^{-x} - e^{-2x}$$

$$\therefore \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x} - e^{-2x}, & x > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow f(x) = (e^{-x} - e^{-2x}) \cdot u(x)$$

(3) $\mathcal{F}[y' - 4y] = \mathcal{F}[e^{-4x}u(x)]$

$$\Rightarrow i\omega Y(\omega) - 4Y(\omega) = \frac{1}{4 + i\omega}$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = -\frac{1}{16 + \omega^2}$$

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1}[-\frac{1}{16 + \omega^2}] = -\frac{1}{8} e^{-4|x|}$$

(4) $\mathcal{F}[y''(x) + 5y'(x) + 6y(x)] = \mathcal{F}[\delta(x - 3)]$

$$\Rightarrow (i\omega)^2 Y(\omega) + 5i\omega Y(\omega) + 6Y(\omega) = e^{-3i\omega}$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{e^{-3i\omega}}{(i\omega)^2 + 5i\omega + 6}$$

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[\frac{e^{-3i\omega}}{(i\omega)^2 + 5i\omega + 6}] = \mathcal{F}^{-1}[\frac{e^{-3i\omega}}{(2 + i\omega)(3 + i\omega)}]$$

$$= \mathcal{F}^{-1}[\frac{e^{-3i\omega}}{2 + i\omega} - \frac{e^{-3i\omega}}{3 + i\omega}]$$

$$= e^{-2(t-3)}u(t - 3) - e^{-3(t-3)}u(t - 3)$$