國立臺灣海洋大學河海工程學系 2023 工程數學(二) 第二次大考

系級：________　　學號：________　　姓名：________

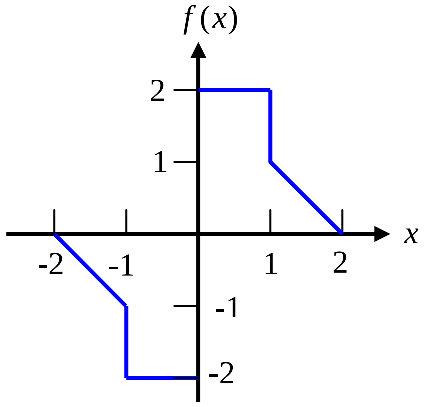
1. (a) $f(x)=1-|x|$，$-2\le x\le 2$ 且 $f(x)=0$，$|x|>2$

   (b) $g(x)=1-|x|$，$-2\le x\le 2$ 且 $g(x)=g(x+4)$

   若欲將上述兩函數展成傅立葉表示式(傅立葉級數、傅立葉積分)，

   試問所對應的展開式分別為何並說明理由? (6%)

2. 給一週期函數如下圖所示，已知其週期為 4，試求此函數 $f(x)$ 之傅立葉級數，並列出前三個係數(a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)之值為何? (12%)



3. 給一函數 $f(x)=x$ 其中 $-2<x<2$ 並且又有 $f(x)=f(x+4)$
   (1) 請畫出函數 $f(x)$ 之圖形。(2%)
   (2) 試問此函數為奇函數或是偶函數? (2%) 週期 $T=$? (2%)
   (3) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(6%)
   (4) 試問: $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots=$? (5%)
   (5) 試問: $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots=$? (5%)

4. 已知若 $x>0$ 則 $f(x)=e^{-x}$，若 $x<0$ 則 $f(x)=0$，試求 $f(x)$ 之傅立葉積分，並求 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 2\omega+\omega\sin 2\omega}{1+\omega^2}d\omega$ 之值。 (12%)

5. 已知以 5 為週期的函數 $f(x)$ 在 $0\le x<5$ 上有 $f(x)=e^{-x}$，試將此函數展成複數形式之傅立葉級數。(12%)

6. (1) 試求函數 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 與 $g(x)=e^{-a|x|}$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$ 與 $G(\omega)$，其中 $a>0$。 (10%)

   (2) 試求 $\mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}\right]=$? (8%)

   (3) 試以傅立葉轉換解 $y'-4y=e^{-4x}u(x)$。 (8%)

   (4) 試以傅立葉轉換解 $y''(x)+5y'(x)+6y(x)=\delta(x-3)$ (10%)

傅立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傅立葉積分： $f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx,\ B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x},\quad \text{其中 } \omega_n=\frac{2n\pi}{T},\ c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$$

傅立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$

Convolution : $f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式: $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\beta\sin\alpha$