國立臺灣海洋大學河海工程學系 2023 工程數學(二) 第一次大考參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 已知 $f = 2x^2 + y^2 + z^2$，$\vec{u} = xz\,\vec{i} + yz\,\vec{k}$，試求：

   (1) $\nabla\cdot(f\vec{u})$ (2) $\nabla\cdot(\nabla f)$ (3) $\nabla\times(\nabla f)$ (4) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{u})$ (5) $\nabla(\vec{u}\cdot\vec{u})$ (15%)

2. 已知三點成一平面 $P(2,5,1), Q(3,-1,2), R(-2,2,4)$，求：

   (1) $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{PR}$ 夾角。 (4%)

   (2) 此三點所組成三角形面積。 (4%)

   (3) 若空間中出現第四點 $O(5,6,1)$ 為頂點，求三向量所夾之四面體 $OPQR$ 體積。

   (4%)

3. 試求通過橢圓 $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ 上一點 $P(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 的單位法向量與切線方程式。

   (10%)

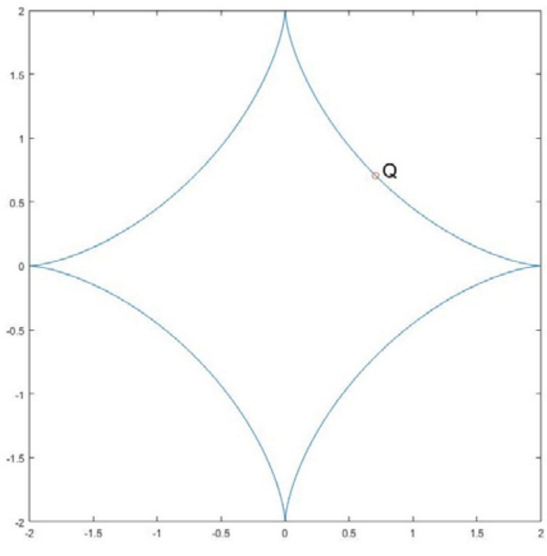
4. 給一星形線(astroid)或稱為四尖辦線(tetracuspid)，其位置向量表示如下：

   $$\vec{r}(t) = a\cos^3 t\,\vec{i} + a\sin^3 t\,\vec{j},\quad 0 \le t \le 2\pi$$

   (1) 試計算星形線之周長。 (6%)

   (2) 試以格林定理：$\int f\,dx + g\,dy = \iint (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\,dxdy$，給定 $f = -y$ 與 $g = x$ 來求星形線之面積。 (6%)

   (3) 試求在點 $Q(t = \frac{\pi}{4})$ 之曲率 κ。 (6%)



5. 試計算 $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA$，其中 $\vec{F} = (x, yz, xz)$，曲面 S 為 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$，$z \ge -1$。

   (10%)

6. 請參考下圖，並回答下列各題：

其中，$\vec{F} = xz\vec{i} + xy\vec{j} + yz\vec{k}$， $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$，

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$

(1) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。 (5%)

(2) $\vec{n}_4$ 為斜面 S_4 上的單位法向量，試問: $\vec{n}_4 = ?$ 並求斜面 S_4 的方程式。 (5%)

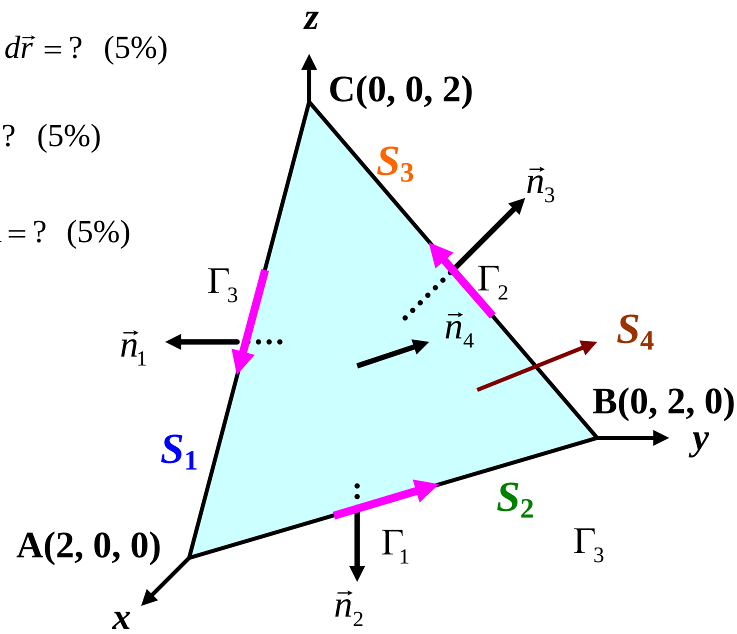
(3) 斜面 S_4 的面積為何? (5%)

(4) $\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = ?$ (5%)

(5) 請使用線積分計算 $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = ?$ (5%)

(6) 請計算 $\iint_{S_4} (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\, dA = ?$ (5%)

(7) 請計算 $\iint_{S_1+S_2+S_3} (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\, dA = ?$ (5%)



Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint \nabla\cdot\vec{F}\, dV = \oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\, dA$ **(3D)**

$\iint \nabla\cdot\vec{F}\, dA = \oint \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds$ **(2D)**

格林定理: $\int P\,dx + Q\,dy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy$

Stokes 旋度定理: $\iint (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\, dA = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$

曲率: $\kappa = \frac{|y''(x)|}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率:** $\tau = \left|\frac{d(\vec{T}(s)\times\vec{N}(s))}{ds}\right|$

二倍角公式: $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$**,** $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

四面體體積: $V = \frac{1}{3}A_0 h$**, (**A_0**: 底面積;** h**: 高)**

參考解答:

1. 已知 $f = 2x^2 + y^2 + z^2$，$\vec{u} = xz\vec{i} + yz\vec{k}$ ，試求:

(1) $\nabla\cdot(f\vec{u})$ (2) $\nabla\cdot(\nabla f)$ (3) $\nabla\times(\nabla f)$ (4) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{u})$ (5) $\nabla(\vec{u}\cdot\vec{u})$ (15%)

(1) $\nabla\cdot(f\vec{u}) = \nabla f\cdot\vec{u} + f(\nabla\cdot\vec{u})$

$$= (4x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k})\cdot(xz\vec{i} + yz\vec{k}) + (2x^2 + y^2 + z^2)\cdot(z + y)$$

$$= 4x^2z + 2yz^2 + 2x^2z + y^2z + z^3 + 2x^2y + y^3 + yz^2$$
$$= 6x^2z + 3yz^2 + y^2z + z^3 + 2x^2y + y^3$$

(2) $\nabla\cdot(\nabla f) = \nabla^2 f = \dfrac{\partial^2(2x^2 + y^2 + z^2)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2(2x^2 + y^2 + z^2)}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2(2x^2 + y^2 + z^2)}{\partial z^2}$

$$= 4 + 2 + 2 = 8$$

(3) $\nabla f = 4x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$

$$\nabla\times(\nabla f) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 0$$

(4) $\nabla\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & 0 & yz \end{vmatrix} = z\vec{i} + x\vec{j} \quad \Rightarrow \nabla\cdot(\nabla\times\vec{u}) = 0$

(5) $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2z^2 + y^2z^2$

$$\nabla(\vec{u}\cdot\vec{u}) = \frac{\partial(x^2z^2 + y^2z^2)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(x^2z^2 + y^2z^2)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(x^2z^2 + y^2z^2)}{\partial z}\vec{k}$$

$$= 2xz^2\vec{i} + 2yz^2\vec{j} + (2x^2z + 2y^2z)\vec{k}$$

2. 已知三點成一平面 $P(2,5,1)$, $Q(3,-1,2)$, $R(-2,2,4)$ ，求:

(1) $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{PR}$ 夾角。 (4%)

(2) 此三點所組成三角形面積。 (4%)

(3) 若空間中出現第四點 $O(5,6,1)$ 為頂點，求三向量所夾之四面體 $OPQR$ 體積。

(4%)

(1) $\overrightarrow{PQ}=Q(3,-1,2)-P(2,5,1)=\vec{i}-6\vec{j}+\vec{k}$

$\overrightarrow{PR}=R(-2,2,4)-P(2,5,1)=-4\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\overrightarrow{PR}\right|\cos\theta \quad \Rightarrow \theta=\cos^{-1}(\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\overrightarrow{PR}\right|})=\cos^{-1}(\dfrac{17}{2\sqrt{323}})$

$=1.07816\ \text{(rad)}=61.77^\circ\ \text{(rad)}$

(2) $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=-15\vec{i}-7\vec{j}-27\vec{k}$

ΔPQR面積$=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\dfrac{\sqrt{1003}}{2}$

(3) $\overrightarrow{PO}=O(5,6,1)-P(2,5,1)=3\vec{i}+\vec{j}$

$\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})=(3\vec{i}+\vec{j})\cdot(-15\vec{i}-7\vec{j}-27\vec{k})=-52$

四面體$OPQR$體積$=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})\right|=\dfrac{26}{3}$

3. 試求通過橢圓 $\dfrac{1}{4}x^2+y^2=1$ 上一點 $P(\sqrt{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 的單位法向量與切線方程式。

令 $\phi=\dfrac{1}{4}x^2+y^2-1 \ \Rightarrow \nabla\phi=\dfrac{1}{2}x\vec{i}+2y\vec{j} \ \Rightarrow \nabla\phi\big|_P=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}$

又 $\left|\nabla\phi\big|_P\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ，此即為單位向量 $\vec{n}=\nabla\phi\big|_P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$

在切平面上任一點 $Q(x,y)$

可知 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \quad \Rightarrow (\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j})\cdot[(x-\sqrt{2})\vec{i}+(y-\dfrac{1}{\sqrt{2}})\vec{j}]=0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x-\sqrt{2})+\dfrac{2}{\sqrt{5}}(y-\dfrac{1}{\sqrt{2}})=0$

$\Rightarrow x+2y=2\sqrt{2}$

4. 給一星形線(astroid)或稱為四尖瓣線(tetracuspid)，其位置向量表示如下:

$$\vec{r}(t) = a\cos^3 t\,\vec{i} + a\sin^3 t\,\vec{j},\quad 0 \le t \le 2\pi$$

(1) 試計算星形線之周長。 (6%)

(2) 試以格林定理: $\int f\,dx + g\,dy = \iint (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\,dxdy$，給定 $f = -y$ 與 $g = x$ 來求星形線之面積。 (6%)

(3) 試求在點 $t = \frac{\pi}{4}$ 之曲率 κ。 (6%)

(1) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = a\cos^3 t\,\vec{i} + a\sin^3 t\,\vec{j}$

可知 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t) \\ \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cdot(\cos t) \end{cases}$

$$S = \int ds = \int |d\vec{r}| = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t\cdot\sin t)^2 + (3a\cos t\cdot\sin^2 t)^2}\,dt$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t\cdot\sin^2 t + \cos^2 t\cdot\sin^4 t}\,dt$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\frac{1+\cos 2t}{2})^2\cdot\sin^2 t + \cos^2 t\cdot(\frac{1-\cos 2t}{2})^2}\,dt$$

$$= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 2t + 2(\sin^2 t - \cos^2 t)\cdot\cos 2t}\,dt$$

$$= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 2t + 2(-\cos 2t)\cdot\cos 2t}\,dt$$

$$= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 2t}\,dt$$

$$= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

(2) $\oint -ydx + xdy = 2\iint dxdy = 2A$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\oint -ydx + xdy$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(-a\sin^3 t)\cdot 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t) + (\cos^3 t)\cdot 3a\sin^2 t\cdot(\cos t)]dt$$

$$= 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t\cdot\sin^4 t + \cos^4 t\cdot\sin^2 t)dt$$

$$= 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(\frac{1-\cos 2t}{2})^2\cdot\cos^2 t+\sin^2 t\cdot(\frac{1+\cos 2t}{2})^2]dt$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 2t)dt$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt$$

$$= \frac{3}{8}\pi a^2$$

(3) $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)}{3a\sin^2 t\cdot(\cos t)} = -\tan t$$

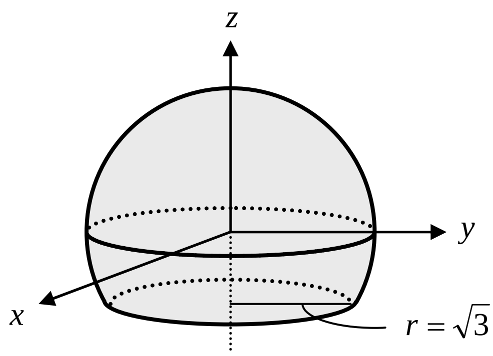
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)} = \frac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t}$$

$$\kappa = \frac{y''(x)}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t}}{[1+(-\tan t)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t}}{\sec^3 t}$$

$$= \frac{1}{3a\cos t\cdot\sin t} = \frac{2}{3a\sin 2t}$$

點 $Q(\,t=\frac{\pi}{4})\ \Rightarrow \kappa = \frac{2}{3a}$

5. 試計算$\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA$，其中$\vec{F}=(x,yz,xz)$，曲面 S 為 $x^2+y^2+z^2=4$, $z\ge -1$。



由 Stokes'定理 $\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}$

在 C: $z=-1,\ x^2+y^2=\sqrt{3}$ $\Rightarrow x=\sqrt{3}\cos\theta,\ \ y=\sqrt{3}\sin\theta$

$\Rightarrow dx=-\sqrt{3}\sin\theta\,d\theta,\ \ dy=\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$

$d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}=(-\sqrt{3}\sin\theta\,\vec{i}+\sqrt{3}\cos\theta\,\vec{j})d\theta$

$\vec{F}=(x,yz,xz)=\sqrt{3}\cos\theta\,\vec{i}-\sqrt{3}\sin\theta\,\vec{j}-\sqrt{3}\cos\theta\,\vec{k}$

$\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}(-3\sin\theta\cos\theta-3\sin\theta\cos\theta)d\theta=0$

6. 請參考下圖，並回答下列各題：

其中，$\vec{F} = xz\vec{i} + xy\vec{j} + yz\vec{k}$， $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$，

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$

(1) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。 (5%)

(2) $\vec{n}_4$ 為斜面 S_4 上的單位法向量，試問: $\vec{n}_4 = ?$ 並求斜面 S_4 的方程式。 (5%)

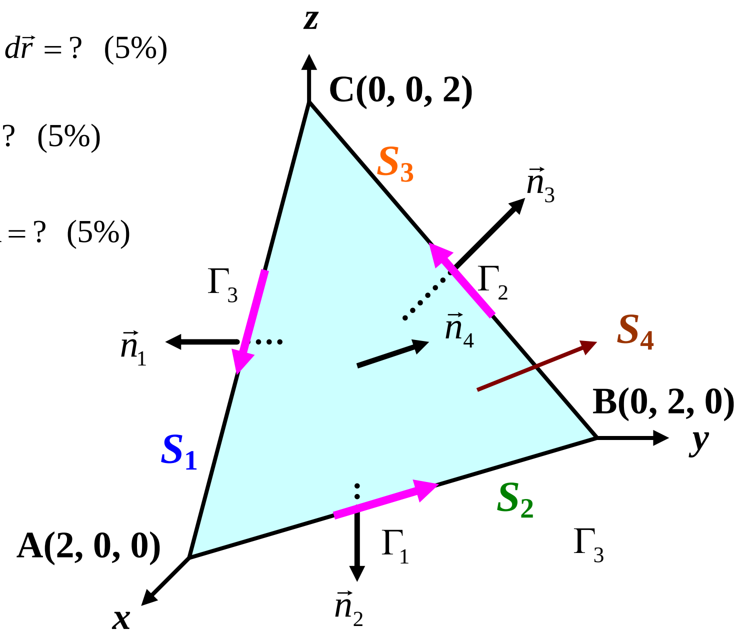
(3) 斜面 S_4 的面積為何? (5%)

(4) $\oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = ?$ (5%)

(5) 請使用線積分計算 $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$ (5%)

(6) 請計算 $\iint_{S_4} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ (5%)

(7) 請計算 $\iint_{S_1+S_2+S_3} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ (5%)



(1) $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & yz \end{vmatrix} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ $\Rightarrow$ 此為非保守場

(2) $\vec{a} = (0, 2, 0) - (2, 0, 0) = (-2, 2, 0)$

$\vec{b} = (0, 0, 2) - (2, 0, 0) = (-2, 0, 2)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (4, 4, 4)$

$$\vec{n}_4 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{(4, 4, 4)}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

平面方程式為 $(x-2, y, z) \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = 0 \Rightarrow x + y + z = 2$

(3) 斜面 S_4 的面積$=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=2\sqrt{3}$

(4) 由 Gauss 散度定理: $\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint \nabla\cdot\vec{F}\,dV=2\iiint dV=2\cdot(\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2)=\frac{8}{3}$

(5) Γ_1 : $x+y=2 \quad \Rightarrow y=2-x \quad \Rightarrow dy=-dx \quad (z=0)$

Γ_2 : $y+z=2 \quad \Rightarrow z=2-y \quad \Rightarrow dz=-dy \quad (x=0)$

Γ_3 : $x+z=2 \quad \Rightarrow z=2-x \quad \Rightarrow dz=-dx \quad (y=0)$

$$\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{\Gamma_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_{\Gamma_1} xzdx+xydy+\int_{\Gamma_2} xydy+yzdz+\int_{\Gamma_3} xzdx+yzdz$$

$$=-\int_2^0 x(2-x)dx-\int_2^0 y(2-y)dy+\int_0^2 x(2-x)dx$$

$$=4$$

(6) 由 Stokes 旋度定理: $\iint_{S_4}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=4$

(7) 由 Stokes 旋度定理: $\iint_{S_1+S_2+S_3}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=-\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-4$