國立臺灣海洋大學河海工程學系 2023 工程數學(二) 第一次大考

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 已知 $f = 2x^2 + y^2 + z^2$，$\vec{u} = xz\vec{i} + yz\vec{k}$ ，試求:

(1) $\nabla\cdot(f\vec{u})$ (2) $\nabla\cdot(\nabla f)$ (3) $\nabla\times(\nabla f)$ (4) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{u})$ (5) $\nabla(\vec{u}\cdot\vec{u})$ (15%)

2. 已知三點成一平面 $P(2,5,1), Q(3,-1,2), R(-2,2,4)$ ，求:

(1) $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{PR}$ 夾角。 (4%)

(2) 此三點所組成三角形面積。 (4%)

(3) 若空間中出現第四點 $O(5,6,1)$ 為頂點，求三向量所夾之四面體 $OPQR$ 體積。

(4%)

3. 試求通過橢圓 $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ 上一點 $P(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 的單位法向量與切線方程式。

(10%)

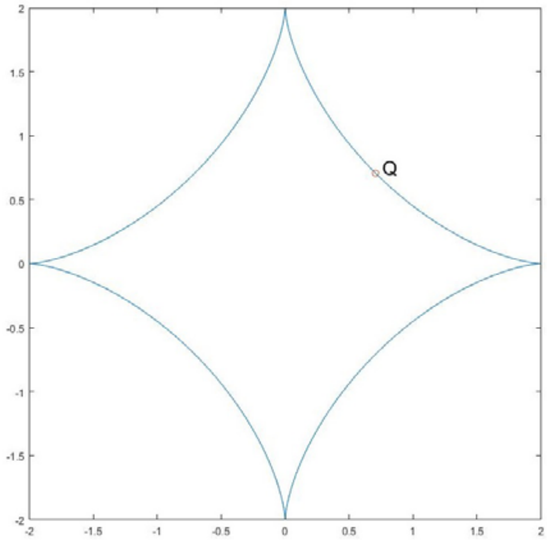
4. 給一星形線(astroid)或稱為四尖瓣線(tetracuspid)，其位置向量表示如下:

$$\vec{r}(t) = a\cos^3 t\,\vec{i} + a\sin^3 t\,\vec{j},\quad 0 \le t \le 2\pi$$

(1) 試計算星形線之周長。 (6%)

(2) 試以格林定理: $\int f\,dx + g\,dy = \iint(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\,dxdy$ ，給定 $f = -y$ 與 $g = x$ 來求星形線之面積。 (6%)

(3) 試求在點 $Q(t = \frac{\pi}{4})$ 之曲率 κ 。 (6%)



5. 試計算 $\iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA$，其中 $\vec{F} = (x, yz, xz)$ ，曲面 S 為 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$，$z \ge -1$。

(10%)

6. 請參考下圖，並回答下列各題：

其中，$\vec{F} = xz\vec{i} + xy\vec{j} + yz\vec{k}$，$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$，

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$

(1) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。 (5%)

(2) $\vec{n}_4$ 為斜面 S_4 上的單位法向量，試問: $\vec{n}_4 = ?$ 並求斜面 S_4 的方程式。 (5%)

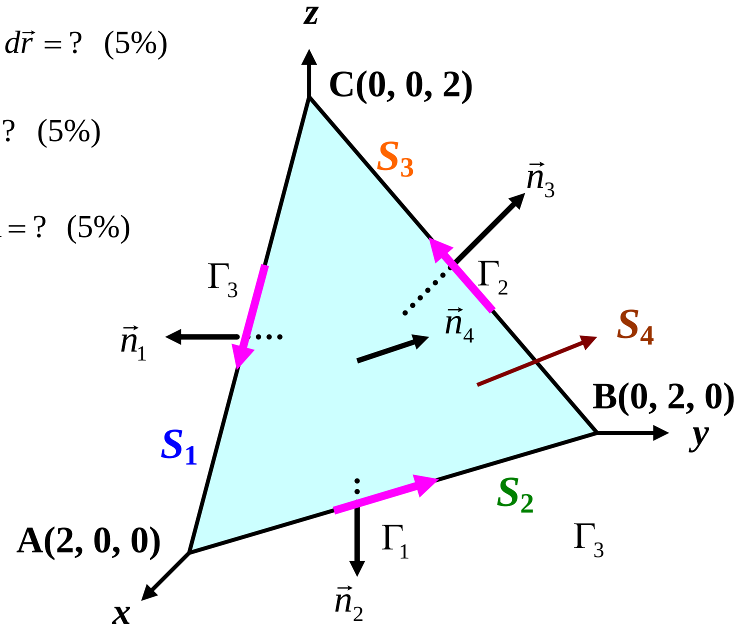
(3) 斜面 S_4 的面積為何? (5%)

(4) $\oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = ?$ (5%)

(5) 請使用線積分計算 $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$ (5%)

(6) 請計算 $\iint_{S_4} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ (5%)

(7) 請計算 $\iint_{S_1+S_2+S_3} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ (5%)



Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$ **(3D)**

$\iint \nabla \cdot \vec{F}\, dA = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ **(2D)**

格林定理: $\int P\, dx + Q\, dy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy$

Stokes 旋度定理: $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

曲率: $\kappa = \dfrac{|y''(x)|}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率:** $\tau = \left| \dfrac{d(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}{ds} \right|$

二倍角公式: $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$，$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

四面體體積: $V = \frac{1}{3} A_0 h$，**(**A_0**: 底面積;** h**: 高)**