國立臺灣海洋大學河海工程學系 2023 工程數學(二) 期末考參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 試求下列 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換為何? (30%)

   (1) $f(t)=1$ (2) $f(t)=t\cos 3t$ (3) $f(t)=e^t\cos 3t$ (4) $f(t)=\cos^2 3t$

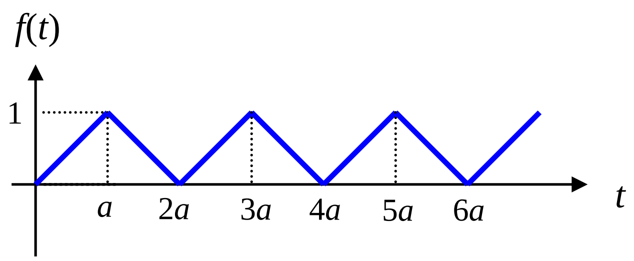
   (5) $f(t)=\cos(3t+\dfrac{\pi}{4})$ (6) $f(t)=\dfrac{1}{t}\sin t$

2. 試求下列 $F(s)$ 的拉普拉斯逆轉換為何? (30%)

   (1) $F(s)=1$ (2) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+6s+8}$ (3) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+6s+9}$

   (4) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+6s+13}$ (5) $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+6s+9}$ (6) $F(s)=\ln\dfrac{s+1}{s-1}$

3. 試求下圖函數之拉普拉斯轉換。(10%)



4. 試以拉普拉斯轉換法求解下述方程式:

   (1) $y(t)=t^2+\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\,d\tau$ 。 (10%)

   (2) $y'(t)+e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}y(\tau)\,d\tau=e^{-t}\int_0^\infty e^t\delta(t)\,dt$, $y(0)=0$ 。 (10%)

5. 已知 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$ 且 $h(t)$ 為 $f(t)$ 與 $g(t)$ 的摺積(Convolution)

   即 $h(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ ，並且由 $h(t)$ 拉普拉斯轉換可得

   $\mathcal{L}[h(t)]=H(s)=F(s)G(s)$ ，若已知 $H(s)=\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$ ，試求 $h(t)=?$ (10%)

6. 試以拉普拉斯轉換法求解下述微分方程式:

   (1) $ty''(t)+ty'(t)+y(t)=0$ 且 $y(0)=0$, $y'(0)=1$ (10%)

   (2) $y''(t)+y(t)=\delta(t)+u(t-\pi)$ 且 $y(0)=0$, $y'(0)=0$ (10%)

7. 試使用拉普拉斯轉換求解下述聯立微分方程組 (10%)

   $$\begin{cases} z''(t)+y'(t)=\cos t \\ y''(t)-z(t)=\sin t \end{cases}$$ 且 $z(0)=-1$, $z'(0)=-1$, $y(0)=1$ 與 $y'(0)=0$

8. (1) 針對這學期教學方式的改變，有何心得感想? (5%)

   (2) 對於如何幫助學生學好工數這門課，有何建議? (5%)

拉普拉斯轉換： $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$

第一平移定理： $\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$

第二平移定理： $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]=e^{-as}F(s)$

尺度變換： $\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

微分函數的拉普拉斯轉換： $\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

$$\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

積分函數的拉普拉斯轉換： $\mathcal{L}[\int_0^t f(x)\,dx]=\frac{F(s)}{s}$

$$\mathcal{L}[\int_0^t\int_0^\tau f(x)\,dx\,d\tau\,]=\frac{F(s)}{s^2}$$

拉普拉斯轉換的微分： $\mathcal{L}[tf(t)]=(-1)\frac{d}{ds}F(s)$

$$\mathcal{L}[t^2f(t)]=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

拉普拉斯轉換的積分： $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^\infty f(\tau)\,d\tau$

$$\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t^2}]=\int_s^\infty\int_\gamma^\infty f(\tau)\,d\tau\,d\gamma$$

摺積： $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$

$$\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=F(s)\cdot G(s)$$

雙曲函數： $\cosh at=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$

$$\sinh at=\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$$

初值定理： $\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$

終值定理： $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$

一階線性 **ODE:** $y'(x)+p(x)y(x)=q(x)$ 其積分因子為 $\mu=e^{\int p(x)dx}$

參考解答：

1. 試求下列 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換為何? (30%)

(1) $f(t)=1$ **(2)** $f(t)=t\cos 3t$ **(3)** $f(t)=e^t\cos 3t$ **(4)** $f(t)=\cos^2 3t$

(5) $f(t)=\cos(3t+\frac{\pi}{4})$ **(6)** $f(t)=\frac{1}{t}\sin t$

(1) $f(t)=1 \quad \Rightarrow \mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}$

(2) $\mathcal{L}[\cos 3t]=\frac{s}{s^2+9}$

$$\therefore\ \mathcal{L}[t\cos 3t]=-\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+9})=-\frac{s^2+9-s\cdot 2s}{(s^2+9)^2}=\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$$

(3) $\mathcal{L}[\cos 3t]=\frac{s}{s^2+9}$

$$\therefore\ \mathcal{L}[e^t\cos 3t]=\frac{s-1}{(s-1)^2+9}=\frac{s-1}{s^2-2s+10}$$

(4) $f(t)=\cos^2 3t=\frac{1+\cos 6t}{2}$

$$\therefore\ \mathcal{L}[\cos^2 3t]=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+6^2})=\frac{s^2+18}{s(s^2+6^2)}$$

(5) $f(t)=\cos(3t+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos 3t-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin 3t=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 3t-\sin 3t)$

$$\therefore\ \mathcal{L}[\cos(3t+\frac{\pi}{4})]=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{s}{s^2+3^2}-\frac{3}{s^2+3^2})=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{s-3}{s^2+3^2}$$

(6) $\mathcal{L}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$

$$\therefore\ \mathcal{L}[\frac{1}{t}\sin t]=\int_s^\infty \frac{1}{\tau^2+1}d\tau=\tan^{-1}\tau\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s$$

2. 試求下列$F(s)$的拉普拉斯逆轉換為何? (30%)

(1) $F(s)=1$ **(2)** $F(s)=\dfrac{1}{s^2+6s+8}$ **(3)** $F(s)=\dfrac{1}{s^2+6s+9}$

(4) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+6s+13}$ **(5)** $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+6s+9}$ **(6)** $F(s)=\ln\dfrac{s+1}{s-1}$

(1) $F(s)=1 \quad \Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}[1]=\delta(t)$

(2) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+6s+8}=\dfrac{1}{(s+2)(s+4)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+4})$

$\therefore f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+4})]=\dfrac{1}{2}(e^{-2t}-e^{-4t})$

(3) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+6s+9}=\dfrac{1}{(s+3)^2}$

$\therefore f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{(s+3)^2}]=e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{s^2}]=te^{-3t}$

(4) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+6s+13}=\dfrac{1}{(s+3)^2+2^2}$

$\therefore f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{s^2+6s+13}]=e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{s^2+2^2}]=\dfrac{1}{2}e^{-3t}\sin 2t$

(5) $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+6s+9}=1-\dfrac{6s+9}{(s+3)^2}=1-\dfrac{6}{s+3}+\dfrac{9}{(s+3)^2}$

$\therefore f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s^2}{s^2+6s+9}]=\delta(t)-6e^{-3t}+9te^{-3t}$

(6) $F(s)=\ln\dfrac{s+1}{s-1}=\ln(s+1)-\ln(s-1)$

$\mathcal{L}[g(t)]=G(s)=\ln(s+1)$

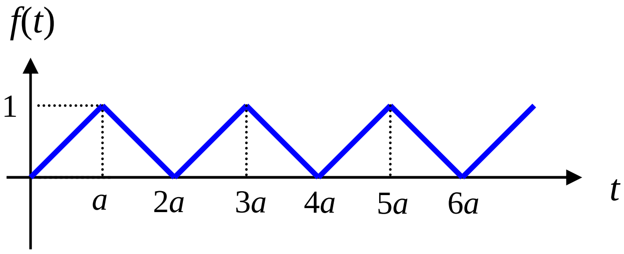
$\mathcal{L}[t\cdot g(t)]=-\dfrac{d}{ds}G(s)=-\dfrac{1}{s+1}$

$\therefore t\cdot g(t)=\mathcal{L}^{-1}[-\dfrac{1}{s+1}]=-e^{-t} \quad \Rightarrow g(t)=\mathcal{L}^{-1}[\ln(s+1)]=-\dfrac{e^{-t}}{t}$

同理: $\mathcal{L}^{-1}[\ln(s-1)]=-\dfrac{e^{t}}{t}$

$\therefore f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\ln\dfrac{s+1}{s-1}]=\dfrac{1}{t}(e^{t}-e^{-t})$

3. 試求下圖函數之拉普拉斯轉換。 (10%)



由圖可知 $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{a}t, & 0\le t\le a,\\ 2-\frac{1}{a}t, & a\le t\le 2a,\end{cases}$ 且 $f(t)=f(t+2a)$

$$\therefore\ \mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-2as}}\int_0^{2a} f(t)\cdot e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2as}}[\int_0^a\frac{1}{a}t\cdot e^{-st}dt+\int_a^{2a}(2-\frac{t}{a})\cdot e^{-st}dt]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2as}}[-\frac{1}{as}(te^{-st}+\frac{1}{s}e^{-st})\Big|_0^a+\frac{1}{as}(-2ae^{-st}+te^{-st}+\frac{1}{s}e^{-st})\Big|_a^{2a}]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2as}}[\frac{1}{as^2}(1-2e^{-as}+e^{-2as})]$$

$$=\frac{(1-e^{-as})^2}{as^2(1-e^{-as})(1+e^{-as})}$$

$$=\frac{1-e^{-as}}{as^2(1+e^{-as})}$$

4. 試以拉普拉斯轉換法求解下述方程式：

(1) $y(t)=t^2+\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\,d\tau$ 。 **(10%)** **(105 中興環工)**

(2) $y'(t)+e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}y(\tau)\,d\tau=e^{-t}\int_0^\infty e^t\delta(t)\,dt$ **，** $y(0)=0$ **(10%)**

(1) $y(t)=t^2+\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow y(t)=t^2+\sin t * y(t)$

$$\therefore\ \mathcal{L}[y(t)]=\mathcal{L}[t^2]+\mathcal{L}[\sin t * y(t)] \quad \Rightarrow Y(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^2+1}Y(s)$$

$$\Rightarrow \frac{s^2}{s^2+1}Y(s)=\frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5}$$

$$\therefore\ y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5}]=t^2+\frac{1}{12}t^4$$

(2) $y'(t)+e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}y(\tau)\,d\tau=e^{-t}\int_0^\infty e^t\delta(t)\,dt$

$$\Rightarrow y'(t)+\int_0^t e^{-2(t-\tau)}y(\tau)\,d\tau=e^{-t}$$

$$\Rightarrow y'(t)+e^{-2t} * y(t)=e^{-t}$$

$$\therefore\ \mathcal{L}[y'(t)]+\mathcal{L}[e^{-2t} * y(t)]=\mathcal{L}[e^{-t}] \quad \Rightarrow sY(s)-y(0)+\frac{1}{s+2}Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow \frac{s^2+2s+1}{s+2}Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)^3}=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}$$

$$\therefore\ y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}]=te^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}$$

5. 已知 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ 且 $h(t)$ 為 $f(t)$ 與 $g(t)$ 的摺積**(Convolution)**

即 $h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$ ，並且由 $h(t)$ 拉普拉斯轉換可得

$\mathcal{L}[h(t)] = H(s) = F(s)G(s)$ ，若已知 $H(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$ ，試求 $h(t) = ?$ **(10%)**

$$H(s) = \frac{s}{s^2+a^2} \cdot \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\therefore \text{ 令 } F(s) = G(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\Rightarrow f(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+a^2}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+a^2}] = \cos at$$

$$\begin{aligned}
h(t) &= f(t) * g(t) \\
&= \int_0^t \cos a\tau \cdot \cos a(t-\tau)\, d\tau \\
&= \int_0^t \cos a\tau \cdot (\cos at \cos a\tau + \sin at \sin a\tau)\, d\tau \\
&= \int_0^t (\cos at \cos^2 a\tau + \frac{1}{2} \sin at \sin 2a\tau)\, d\tau \\
&= \int_0^t [\frac{1}{2} \cos at (1 + \cos 2a\tau) + \frac{1}{2} \sin at \sin 2a\tau]\, d\tau \\
&= \frac{1}{2} [\cos at (\tau + \frac{1}{2a} \sin 2a\tau) - \frac{1}{2a} \sin at \cos 2a\tau] \Big|_0^t \\
&= \frac{1}{2} [\cos at (t + \frac{1}{2a} \sin 2at) - \frac{1}{2a} (\sin at \cos 2at - \sin at)] \\
&= \frac{1}{2} (t \cos at + \frac{1}{a} \sin at) \\
&= \frac{at \cos at + \sin at}{2a}
\end{aligned}$$

6. 試以拉普拉斯轉換法求解下述微分方程式：

(1) $ty''(t)+ty'(t)+y(t)=0$ 且 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ **(10%)**

(2) $y''(t)+y(t)=\delta(t)+u(t-\pi)$ 且 $y(0)=0$，$y'(0)=0$ **(10%)**

(1) $\mathcal{L}[ty''(t)+ty'(t)+y(t)]=\mathcal{L}[0]$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]-\frac{d}{ds}[sY(s)-y(0)]+Y(s)=0$$

$$\Rightarrow -[2sY(s)+s^2Y'(s)]-[Y(s)+sY'(s)]+Y(s)=0$$

$$\Rightarrow -(s^2+s)Y'(s)-2sY(s)=0$$

$$\Rightarrow Y'(s)+\frac{2}{s+1}Y(s)=0$$ 此為一階線性 ODE

積分因子為 $\mu=e^{\int\frac{2}{s+1}dx}=e^{2\ln(s+1)}=(s+1)^2$

同乘積分因子後可得 $(s+1)^2\cdot Y'(s)+2(s+1)Y(s)=0$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}[(s+1)^2\cdot Y(s)]=0$$

$$\Rightarrow (s+1)^2\cdot Y(s)=C$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{C}{(s+1)^2}$$

$\therefore\ y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=Cte^{-t}$

$y'(t)=C(e^{-t}-te^{-t})$ 又 $y'(0)=1$ $\Rightarrow C=1$

$\therefore\ y(t)=te^{-t}$

(2) $\mathcal{L}[y''(t)+y(t)]=\mathcal{L}[\delta(t)+u(t-\pi)]$

$$\Rightarrow s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=e^{-0s}+\frac{1}{s}e^{-\pi s}$$

$$\Rightarrow (s^2+1)Y(s)=e^{-0s}+\frac{1}{s}e^{-\pi s}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^2+1}e^{-0s}+\frac{1}{s(s^2+1)}e^{-\pi s}=\frac{1}{s^2+1}e^{-0s}+\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right)e^{-\pi s}$$

$\therefore\ y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=u(t)\cdot\sin t+[1-\cos(t-\pi)]\cdot u(t-\pi)$

7. 試使用拉普拉斯轉換求解下述聯立微分方程組 (10%)

$$\begin{cases} z''(t)+y'(t)=\cos t \\ y''(t)-z(t)=\sin t \end{cases}$$ **且** $z(0)=-1$， $z'(0)=-1$， $y(0)=1$ **與** $y'(0)=0$

取拉普拉斯轉換後可得

$$\begin{cases} s^2Z(s)-sz(0)-z'(0)+sY(s)-y(0)=\dfrac{s}{s^2+1} \\ s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-Z(s)=\dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^2Z(s)+s+1+sY(s)-1=\dfrac{s}{s^2+1} \\ s^2Y(s)-s-Z(s)=\dfrac{1}{s^2+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y(s)+sZ(s)=\dfrac{-s^2}{s^2+1} \\ s^2Y(s)-Z(s)=\dfrac{s^3+s+1}{s^2+1} \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} Y(s)=\dfrac{s}{s^2+1} \\ Z(s)=\dfrac{-s-1}{s^2+1} \end{cases}$$

取拉普拉斯逆轉換後可得 $\begin{cases} y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\cos t \\ z(t)=\mathcal{L}^{-1}[Z(s)]=-\cos t-\sin t \end{cases}$