國立臺灣海洋大學河海工程學系 2023 工程數學(二) 期末考

系級：____________ 學號：____________ 姓名：____________

1. 試求下列 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換為何? (30%)

   (1) $f(t)=1$ (2) $f(t)=t\cos 3t$ (3) $f(t)=e^{t}\cos 3t$ (4) $f(t)=\cos^{2}3t$

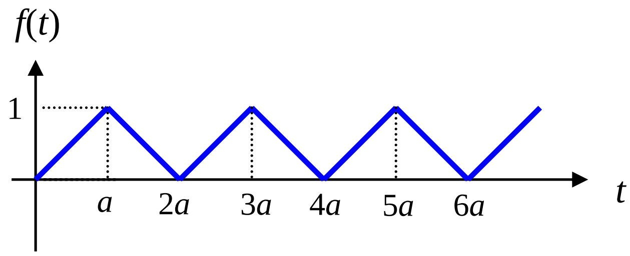
   (5) $f(t)=\cos(3t+\dfrac{\pi}{4})$ (6) $f(t)=\dfrac{1}{t}\sin t$

2. 試求下列 $F(s)$ 的拉普拉斯逆轉換為何? (30%)

   (1) $F(s)=1$ (2) $F(s)=\dfrac{1}{s^{2}+6s+8}$ (3) $F(s)=\dfrac{1}{s^{2}+6s+9}$

   (4) $F(s)=\dfrac{1}{s^{2}+6s+13}$ (5) $F(s)=\dfrac{s^{2}}{s^{2}+6s+9}$ (6) $F(s)=\ln\dfrac{s+1}{s-1}$

3. 試求下圖函數之拉普拉斯轉換。(10%)



4. 試以拉普拉斯轉換法求解下述方程式:

   (1) $y(t)=t^{2}+\int_{0}^{t}\sin(t-\tau)y(\tau)\,d\tau$ 。 (10%)

   (2) $y'(t)+e^{-2t}\int_{0}^{t}e^{2\tau}y(\tau)\,d\tau=e^{-t}\int_{0}^{\infty}e^{t}\delta(t)\,dt$, $y(0)=0$ 。 (10%)

5. 已知 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$ 且 $h(t)$ 為 $f(t)$ 與 $g(t)$ 的摺積(Convolution)

   即 $h(t)=f(t)*g(t)=\int_{0}^{t}f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ ，並且由 $h(t)$ 拉普拉斯轉換可得

   $\mathcal{L}[h(t)]=H(s)=F(s)G(s)$ ，若已知 $H(s)=\dfrac{s^{2}}{(s^{2}+a^{2})^{2}}$ ，試求 $h(t)=?$ (10%)

6. 試以拉普拉斯轉換法求解下述微分方程式:

   (1) $ty''(t)+ty'(t)+y(t)=0$ 且 $y(0)=0$, $y'(0)=1$ (10%)

   (2) $y''(t)+y(t)=\delta(t)+u(t-\pi)$ 且 $y(0)=0$, $y'(0)=0$ (10%)

7. 試使用拉普拉斯轉換求解下述聯立微分方程組 (10%)

   $\begin{cases} z''(t)+y'(t)=\cos t \\ y''(t)-z(t)=\sin t \end{cases}$ 且 $z(0)=-1$, $z'(0)=-1$, $y(0)=1$ 與 $y'(0)=0$

8. (1) 針對這學期教學方式的改變，有何心得感想? (5%)

   (2) 對於如何幫助學生學好工數這門課，有何建議? (5%)

拉普拉斯轉換： $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$

第一平移定理： $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

第二平移定理： $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as} F(s)$

尺度變換： $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$

微分函數的拉普拉斯轉換： $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$

積分函數的拉普拉斯轉換： $\mathcal{L}[\int_0^t f(x)\, dx] = \frac{F(s)}{s}$

$\mathcal{L}[\int_0^t \int_0^\tau f(x)\, dx\, d\tau] = \frac{F(s)}{s^2}$

拉普拉斯轉換的微分： $\mathcal{L}[tf(t)] = (-1)\frac{d}{ds} F(s)$

$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$

拉普拉斯轉換的積分： $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^\infty f(\tau)\, d\tau$

$\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t^2}] = \int_s^\infty \int_\gamma^\infty f(\tau)\, d\tau\, d\gamma$

摺積： $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$

$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$

雙曲函數： $\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$

$\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$

初值定理： $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$

終值定理： $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$

一階線性 **ODE:** $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$ 其積分因子為 $\mu = e^{\int p(x)dx}$