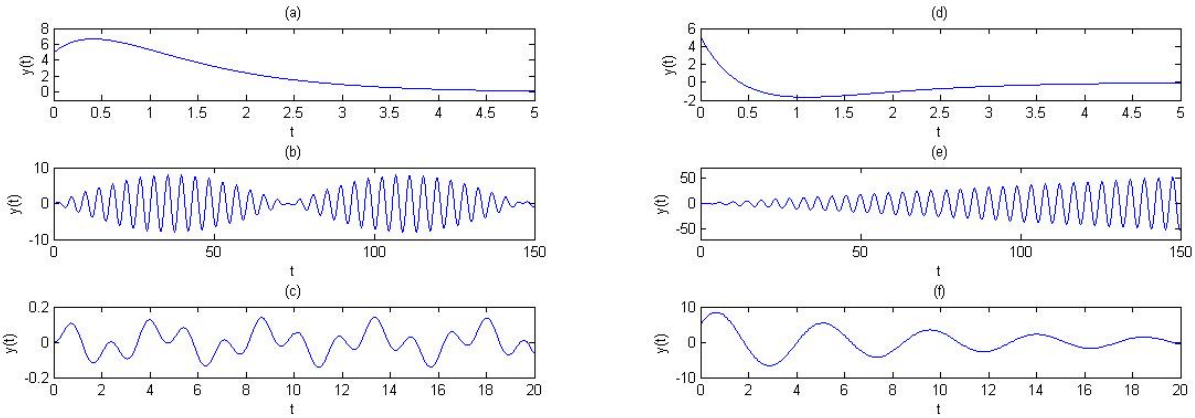
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 工程數學(一) 第二次大考

系級：_____　　學號：_____　　姓名：_____

1. 給一單自由度振動系統，其控制方程式為 $m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=f(t)$，已知相關參數如下表所示，試問其所對應之位移圖為何? (12%)

	系統參數	外力	初始條件	位移圖
(1)	$m=1,\ c=3,\ k=2$	$f(t)=0$	$y(0)=5,\ \dot{y}(0)=-20$	
(2)	$m=1,\ c=3,\ k=2$	$f(t)=0$	$y(0)=5,\ \dot{y}(0)=10$	
(3)	$m=1,\ c=0.2,\ k=2$	$f(t)=0$	$y(0)=5,\ \dot{y}(0)=10$	
(4)	$m=1,\ c=0,\ k=2$	$f(t)=\cos 4t$	$y(0)=0,\ \dot{y}(0)=0$	
(5)	$m=1,\ c=0,\ k=2$	$f(t)=\cos\sqrt{2}\,t$	$y(0)=0,\ \dot{y}(0)=0$	
(6)	$m=1,\ c=0,\ k=2$	$f(t)=\cos 1.5t$	$y(0)=0,\ \dot{y}(0)=0$	



2. 給一非齊次線性微分方程如下:

$$x^2y''(x)+axy'(x)+by(x)=\ln x$$

已知此微分方程的兩個補解為 x 與 $x\ln x$

(1) 試求常數 a 、b 為何? (4%)

(2) 以變數變換，令 $t=\ln x$，則 $y(x)=Y(t)$，試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。 (6%)

(3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t)=$? (4%)

(4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t)=$? (4%)

(5) 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$。 (4%)

3. 試求下述微分方程之通解

(1) $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$ (10%)

(2) $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{x^3 e^x}$ (10%)

(3) $(x+2)^2 y'' - (3x+6)y' + 4y = 3x + 2$ 。 (10%)

(4) $xy'' + (x+2)y' + y = -2xe^{-x}$ 。 (10%)

4. 已知微分方程式 $(x^2 - 2x)y'' + 2(1-x)y' + 2y = 0$

(1) 試以 $y_1 = x^m$ 求一補解。 (3%)

(2) 試求另一補解。 (7%)

5. 給一微分方程 $\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = F\cos\gamma t$ ，其中 F 為常數且 $\gamma \neq \omega$

(1) 試求此微分方程之補解 $y_h(t) =$? (3%)

(2) 試求 Wronskian，即 $W(y_1, y_2) =$? (2%)

(3) 試求微分方程之通解 $y(t) =$? (5%)

(4) 若給初始條件 $y(0) = 0$ 與 $\dot{y}(0) = 0$ ，則 $y(t) =$? (3%)

(5) 當 $\gamma = \omega$ 時，則 $\lim\limits_{\gamma \to \omega} y(t) =$? (3%)