國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 工程數學(一) 第一次大考參考解答

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 輻射性原子核衰減率與標本內現有原子核個數成正比。在 1500 年內輻射性原子核衰減成一半數量。若一開始原子核數量為 $x(0)=x_0$。
   (1) 4500 年後，原始原子核尚殘留多少%？(6%)
   (2) 最初的原子核殘留成 10%需要多少年?（請四捨五入取整數）(6%)
   （$\ln 1=0,\ \ln 2=0.693,\ \ln 10=2.303$）
2. 試以分離變數法求解下述微分方程式:
   (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+x-y-1}{xy-x+y-1}$, $y(0)=0$ (7%)
   (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y-x-1}$, $y(-5)=-5$ (7%)
   (3) $xy'-y=\dfrac{y}{\ln y-\ln x}$ (7%)
   (若無法直接使用分離變數法，則先變數變換法後，再用分離變數法求解)
3. 已知微分方程式為 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2-y}{x\ln x}$
   (1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(7%)
   (若為線性，直接求解；若非線性，則轉換成線性，再求解)
   (2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(7%)
   (若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)
4. 已知微分方程式為 $y'=x^3(y-x)^2+x^{-1}y$
   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)
   (2) 此為線性或非線性? (2%)
   (3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=$? (7%)
5. 已知微分方程式為 $2xyy'=3y^2+x^2$, $y(1)=2$
   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)
   (2) 此為線性或非線性? (2%)
   (3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=$? (7%)
6. 已知微分方程式為 $4(y')^2-xy'+y=0$
   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)
   (2) 此為線性或非線性? (2%)
   (3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=$? (7%)
7. 試解下列各微分方程
   (1) $(y')^2+4y'\cosh 2x+4=0$ (8%)
   (2) $x(y')^2-2yy'-x=0$ (8%)

<參考解答>

1. 輻射性原子核衰減率與標本內現有原子核個數成正比。在 1500 年內輻射性原子核衰減成一半數量。若一開始原子核數量為 $x(0)=x_0$ 。

(1) 4500 年後，原始原子核尚殘留多少% ？ (6%)

(2) 最初的原子核殘留成 10%需要多少年?（請四捨五入取整數）(6%)

（$\ln 1=0$, $\ln 2=0.693$, $\ln 10=2.303$）

由題目可知其數學模式為 $\dfrac{dx}{dt}=-kx$ 且 $k>0$

$\therefore\ x(t)=Ce^{-kt}$

又 $x(0)=x_0 \quad \Rightarrow C=x_0 \quad \Rightarrow x(t)=x_0e^{-kt}$

且 $x(1500)=\dfrac{1}{2}x_0 \quad \Rightarrow \dfrac{1}{2}x_0=x_0e^{-1500k} \quad \Rightarrow e^{-1500k}=\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow e^{-k}=(\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{1500}}$

(1) $x(4500)=x_0e^{-4500k}=x_0e^{3(-1500k)}=x_0(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{8}x_0$ 或 12.5%

$\therefore$ 原始原子核尚殘留 12.5%

(2) $x(t)=\dfrac{1}{10}x_0 \quad \Rightarrow x_0e^{-kt}=\dfrac{1}{10}x_0 \quad \Rightarrow (\dfrac{1}{2})^{\frac{t}{1500}}=\dfrac{1}{10}$

$$\Rightarrow \frac{t}{1500}\ln(\frac{1}{2})=\ln(\frac{1}{10})$$

$$\Rightarrow t=1500\cdot\frac{\ln 10}{\ln 2}\approx 4985\,(\text{年})$$

2. 試以分離變數法求解下述微分方程式:

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+x-y-1}{xy-x+y-1}$, $y(0)=0$ **(7%)**

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y-x-1}$, $y(-5)=-5$ **(7%)**

(3) $xy'-y=\dfrac{y}{\ln y-\ln x}$ **(7%)**

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+x-y-1}{xy-x+y-1}=\dfrac{x(y+1)-(y+1)}{x(y-1)+(y-1)}=\dfrac{(x-1)(y+1)}{(x+1)(y-1)}$

$$\Rightarrow \int\frac{y-1}{y+1}dy=\int\frac{x-1}{x+1}dx$$

$$\Rightarrow \int(1-\frac{2}{y+1})dy=\int(1-\frac{2}{x+1})dx$$

$$\Rightarrow y-2\ln|y+1|=x-2\ln|x+1|+C$$

又 $y(0)=0 \quad \Rightarrow C=0$

$\therefore\ y-2\ln|y+1|=x-2\ln|x+1|$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y-x-1}$， $y(-5)=-5$

令 $u=y-x \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=\dfrac{dy}{dx}-1$ 代回 ODE

可得 $\dfrac{du}{dx}+1=\dfrac{u}{u-1} \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u-1}$

$$\Rightarrow \int (u-1)du=\int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u^2-u=x+C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(y-x)^2-(y-x)=x+C$$

又 $y(-5)=-5 \quad \Rightarrow C=5$

$\therefore \quad \dfrac{1}{2}(y-x)^2-(y-x)=x+5$

(3) $xy'-y=\dfrac{y}{\ln y-\ln x} \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{\frac{y}{x}}{\ln\frac{y}{x}}$

令 $u=\dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow y=ux \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{du}{dx}+u$ 代回 ODE

可得 $x\dfrac{du}{dx}+u-u=\dfrac{u}{\ln u} \quad \Rightarrow x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u}{\ln u}$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln u}{u}du=\int \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int (\ln u)\,d(\ln u)=\int \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\ln u)^2=\ln x+C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[\ln(\frac{y}{x})]^2=\ln x+C$$

3. 已知微分方程式為 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2-y}{x\ln x}$

(1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(7%)
(若為線性，直接求解；若非線性，則轉換成線性，再求解)

(2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(7%)
(若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2-y}{x\ln x} \quad \Rightarrow y'+\dfrac{1}{x\ln x}y=\dfrac{2x}{\ln x}$

此為一階線性微分方程式

積分因子 $\mu=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}=e^{\int\frac{1}{\ln x}d(\ln x)}=e^{\ln(\ln x)}=\ln x$

同乘積分因子後可得 $(\ln x)y'+\dfrac{1}{x}y=2x \quad \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(y\ln x)=2x$

$\Rightarrow y\ln x=x^2+C$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2-y}{x\ln x} \quad \Rightarrow (2x^2-y)dx-(x\ln x)dy=0$

令 $M=2x^2-y \quad \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=-1$

$N=-x\ln x \quad \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=-\ln x-1$

由判斷式 $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$ 可知，此為非正合 ODE

由 $\dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x})=-\dfrac{1}{x}$ 可知 μ 為 $\mu(x)$

$\therefore \dfrac{1}{\mu}d\mu=\dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x})dx \quad \Rightarrow \int\dfrac{1}{\mu}d\mu=\int\dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x})dx$

$\Rightarrow \ln|\mu|=-\int\dfrac{1}{x}dx=-\ln|x|$

$\Rightarrow \mu=\dfrac{1}{x}$

同乘積分因子後可得 $(2x-\dfrac{y}{x})dx-(\ln x)dy=0$

由於此為正合 ODE

$\therefore$ 可知 $\overline{M}=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=2x-\dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \phi=x^2-y\ln x+f(y)$

$\overline{N}=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=-\ln x \quad \Rightarrow \phi=-y\ln x+g(x)$

比較後可得 $\phi(x,y)=x^2-y\ln x=C$

4. 已知微分方程式為 $y' = x^3(y-x)^2 + x^{-1}y$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 此為線性或非線性? (2%)

(3) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ **(7%)**

(1) $y' = x^3(y-x)^2 + x^{-1}y \quad \Rightarrow y' = x^3y^2 + \dfrac{1-2x^5}{x}y + x^5$

此為 Riccati ODE

(2) 非線性

(3) 由觀察得一解 $S = x$

令 $y = S + \dfrac{1}{V} = x + \dfrac{1}{V} \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{V'}{V^2}$ 代回 ODE 可得

$$1 - \frac{V'}{V^2} = x^3(x + \frac{1}{V})^2 + \frac{1-2x^5}{x}(x + \frac{1}{V}) + x^5$$

$\Rightarrow V' + \dfrac{1}{x}V = -x^3 \longrightarrow$ 此為一階線性 ODE

可知其積分因子為 $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

同乘積分因子後可得 $xV' + V = -x^4 \quad \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(xV) = -x^4$

$$\Rightarrow xV = -\frac{1}{5}x^5 + C$$

$$\Rightarrow V = -\frac{1}{5}x^4 + C\frac{1}{x}$$

$\therefore\ y = S + \dfrac{1}{V} = x + \dfrac{1}{-\frac{1}{5}x^4 + C_1\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \dfrac{1}{y-x} = -\dfrac{1}{5}x^4 + C\dfrac{1}{x}$

5. 已知微分方程式為 $2xyy' = 3y^2 + x^2$**，** $y(1) = 2$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 此為線性或非線性? (2%)

(3) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ **(7%)**

(1) $2xyy' = 3y^2 + x^2 \quad \Rightarrow y' - \frac{3}{2}xy = \frac{x}{2}y^{-1}$

此為 Bernoulli ODE

(2) 非線性 ODE

(3) $y' - \frac{3}{2x}y = \frac{x}{2}y^{-1} \quad \Rightarrow yy' - \frac{3}{2x}y^2 = \frac{x}{2}$

令 $u = y^2 \quad \Rightarrow u' = 2yy'$ 代回 ODE 可得

$\frac{1}{2}u' - \frac{3}{2x}u = \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow u' - \frac{3}{x}u = x \quad \rightarrow$ 此為一階線性 ODE

積分因子為 $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln|x|} = \frac{1}{x^3}$

同乘積分因子後可得 $\Rightarrow \frac{1}{x^3}u' - \frac{3}{x^4}u = \frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}u\right) = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \int d\left(\frac{1}{x^3}u\right) = \int \frac{1}{x^2}dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3}u = -\frac{1}{x} + C$$

$$\Rightarrow y^2 = -x^2 + Cx^3$$

$y(1) = 2 \quad \Rightarrow C = 5$

$\therefore \quad y^2 = 5x^3 - x^2$

6. 已知微分方程式為 $4(y')^2 - xy' + y = 0$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 此為線性或非線性? (2%)

(3) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ **(7%)**

(1) $4(y')^2 - xy' + y = 0 \quad \Rightarrow y = xy' - 4(y')^2$

此為 Clairaut ODE

(2) 屬於非線性 ODE

(3) $y = xy' - 4(y')^2$

令 $p = y' \quad \Rightarrow y = xp - 4p^2$

將兩邊對 x 微分可得 $y' = p + xp' - 8pp'$

$$\Rightarrow p = p + xp' - 8pp'$$

$$\Rightarrow (x - 8p)p' = 0$$

由 $p' = 0 \quad \Rightarrow y' = p = c$ 代回 $y = xy' - 4(y')^2$

可得 $y = xc - 4c^2$（通解）

由 $x - 8p = 0 \quad \Rightarrow y' = p = \dfrac{x}{8}$ 代回 $y = xy' - 4(y')^2$

可得 $y = \dfrac{x^2}{16}$（奇解）

7. 試解下列各微分方程

(1) $(y')^2 + 4y'\cosh 2x + 4 = 0$ **(8%)**

(2) $x(y')^2 - 2yy' - x = 0$ **(8%)**

(1) $(y')^2 + 4y'\cosh 2x + 4 = 0 \quad \Rightarrow (y')^2 + 2(e^{2x} + e^{-2x})y' + 4 = 0$

$\Rightarrow (y' + 2e^{2x})(y' + 2e^{-2x}) = 0$

當 $y' + 2e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow y = -e^{2x} + C_1 \quad \Rightarrow y + e^{2x} - C_1 = 0$

當 $y' + 2e^{-2x} = 0 \quad \Rightarrow y = e^{-2x} + C_2 \quad \Rightarrow y - e^{-2x} - C_2 = 0$

$\therefore$ 此 ODE 之解為 $(y + e^{2x} - C_1)(y - e^{-2x} - C_2) = 0$

(2) $x(y')^2 - 2yy' - x = 0$

令 $u = y'$ 代入 ODE 可得 $\quad xu^2 - 2yu - x = 0 \quad \Rightarrow 2y = xu - \dfrac{x}{u}$

此為 $y = f(x,u)$ 型，因此兩邊對 x 微分後可得

$$2\frac{dy}{dx} = u + xu' - \frac{1}{u} + \frac{x}{u^2}u' \quad \Rightarrow 2u = u + xu' - \frac{1}{u} + \frac{x}{u^2}u'$$

$$\Rightarrow u + \frac{1}{u} = xu'(1 + \frac{1}{u^2})$$

$$\Rightarrow u(1 + \frac{1}{u^2}) = xu'(1 + \frac{1}{u^2})$$

$$\Rightarrow u = xu'$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u}du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \ln|u| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\Rightarrow u = Cx \quad \text{代回} \quad 2y = xu - \frac{x}{u}$$

可得 $2y = Cx^2 - \dfrac{1}{C} \quad \Rightarrow C^2x^2 - 2Cy - 1 = 0$