國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 工程數學(一) 第一次大考

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 輻射性原子核衰減率與標本內現有原子核個數成正比。在 1500 年內輻射性原子核衰減成一半數量。若一開始原子核數量為 $x(0)=x_0$。
   (1) 4500 年後，原始原子核尚殘留多少%？(6%)
   (2) 最初的原子核殘留成 10%需要多少年?（請四捨五入取整數）(6%)
   （$\ln 1=0,\ \ln 2=0.693,\ \ln 10=2.303$）
2. 試以分離變數法求解下述微分方程式:
   (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+x-y-1}{xy-x+y-1}$, $y(0)=0$ (7%)
   (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{y-x-1}$, $y(-5)=-5$ (7%)
   (3) $xy'-y=\dfrac{y}{\ln y-\ln x}$ (7%)
   (若無法直接使用分離變數法，則先變數變換法後，再用分離變數法求解)
3. 已知微分方程式為 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2-y}{x\ln x}$
   (1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(7%)
   (若為線性，直接求解；若非線性，則轉換成線性，再求解)
   (2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(7%)
   (若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)
4. 已知微分方程式為 $y'=x^3(y-x)^2+x^{-1}y$
   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)
   (2) 此為線性或非線性? (2%)
   (3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=$? (7%)
5. 已知微分方程式為 $2xyy'=3y^2+x^2$, $y(1)=2$
   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)
   (2) 此為線性或非線性? (2%)
   (3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=$? (7%)
6. 已知微分方程式為 $4(y')^2-xy'+y=0$
   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)
   (2) 此為線性或非線性? (2%)
   (3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=$? (7%)
7. 試解下列各微分方程
   (1) $(y')^2+4y'\cosh 2x+4=0$ (8%)
   (2) $x(y')^2-2yy'-x=0$ (8%)