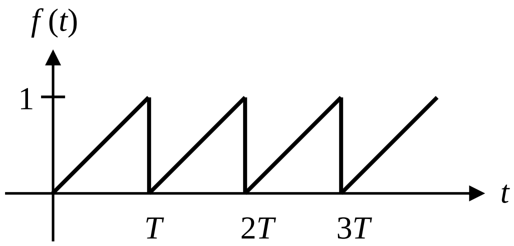
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 工程數學(二) 第十三次作業參考解答

系級：____________ 學號：____________ 姓名：____________

1. 試求下述函數之拉氏轉換。



2. 試求下述函數之拉氏反轉換

   (a) $F(s)=\dfrac{s-6}{(s-1)^2+4}$ (b) $F(s)=\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$

3. 試求 $F(s)=\dfrac{s}{(s+2)^2(s^2+2s+10)}$ 與 $F(s)=\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}$ 之拉氏反轉換。

4. 試求以下各函數之拉氏反轉換。

   (a) $F(s)=\ln\dfrac{s-1}{s}$ (b) $F(s)=\ln(1-\dfrac{a^2}{s^2})$

5. 試求$F(s)=\dfrac{\tanh s}{s}$之拉氏反轉換函數，並畫出其圖。

6. 試求 $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+3^2)^2}$ 之拉氏反轉換。

參考解答:

1. $f(t)=(t^2-4)u(t-4)=[(t-4)^2+8(t-4)+12]u(t-4)$

$$\mathcal{L}[t^2+8t+12]=\frac{2}{s^3}+\frac{8}{s^2}+\frac{12}{s}$$

$$\mathcal{L}[f(t)]=(\frac{2}{s^3}+\frac{8}{s^2}+\frac{12}{s})e^{-4s}$$

$$\mathcal{L}[e^{-2t}f(t)]=[\frac{2}{(s+2)^3}+\frac{8}{(s+2)^2}+\frac{12}{s+2}]e^{-4s}$$

2. (a) $F(s)=\dfrac{s-6}{(s-1)^2+4}=\dfrac{s-1}{(s-1)^2+2^2}-\dfrac{5}{2}\dfrac{2}{(s-1)^2+2^2}$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=e^t\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+2^2}-\frac{5}{2}\frac{2}{s^2+2^2}]=e^t(\cos 2t-\frac{5}{2}\sin 2t)$$

(b) $F(s)=\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}=\dfrac{6s-4}{(s-2)^2+4^2}=6\dfrac{s-2}{(s-2)^2+4^2}+2\dfrac{4}{(s-2)^2+4^2}$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=e^{2t}\mathcal{L}^{-1}[6\frac{s}{s^2+4^2}+2\frac{4}{s^2+4^2}]=e^{2t}(6\cos 4t+2\sin 4t)$$

3. $F(s)=\dfrac{s}{(s+2)^2(s^2+2s+10)}=\dfrac{A}{s+2}+\dfrac{B}{(s+2)^2}+\dfrac{Cs+D}{s^2+2s+10}$

通分後可得: $s=A(s+2)(s^2+2s+10)+B(s^2+2s+10)+(Cs+D)(s+2)^2$

令 $s=-2 \quad \Rightarrow B=-\dfrac{1}{5}$

$s=0 \quad \Rightarrow 20A+10B+4D=0 \quad \Rightarrow 20A+4D=2$

比較 s^3 係數可知 $A+C=0 \quad \Rightarrow C=-A$

比較 s^2 係數可知 $4A+B+4C+D=0 \quad \Rightarrow D=-B=\dfrac{1}{5} \quad \Rightarrow A=\dfrac{3}{50}$

$\Rightarrow C=-\dfrac{3}{50}$

$$\therefore \quad F(s)=\frac{\frac{3}{50}}{s+2}+\frac{-\frac{1}{5}}{(s+2)^2}+\frac{-\frac{3}{50}s+\frac{1}{5}}{(s+1)^2+3^2}=\frac{1}{50}[\frac{3}{s+2}-\frac{10}{(s+2)^2}+\frac{-3(s+1)+13}{(s+1)^2+3^2}]$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{50}(3e^{-2t}-10te^{-2t}-3e^{-t}\cos 3t+\frac{13}{3}e^{-t}\sin 3t)$$

$$F(s)=\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

通分後可得: $3s+1=A(s^2+1)+(Bs+C)(s-1)$

令 $s=1 \quad \Rightarrow A=2$

令 $s=0 \quad \Rightarrow A-C=1 \quad \Rightarrow C=1$

比較 s^2 係數可知　$A+B=0 \;\;\Rightarrow B=-2$

$$\therefore\;\; F(s)=\frac{2}{s-1}+\frac{-2s+1}{s^2+1}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=2e^t-2\cos t+\sin t$$

4. (a) $F(s)=\ln\frac{s-1}{s}=\ln(s-1)-\ln(s)$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}F(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[\frac{d}{ds}F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}]$$

$$\Rightarrow -t\,f(t)=e^t-1$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{1}{t}(1-e^t)$$

(b) $F(s)=\ln(1-\frac{a^2}{s^2})=\ln(\frac{s^2-a^2}{s^2})=\ln(s^2-a^2)-2\ln(s)$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}F(s)=\frac{2s}{s^2-a^2}-\frac{2}{s}=\frac{1}{s+a}+\frac{1}{s-a}-\frac{2}{s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[\frac{d}{ds}F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+a}+\frac{1}{s-a}-\frac{2}{s}]$$

$$\Rightarrow -t\,f(t)=e^{-at}+e^{at}-2$$

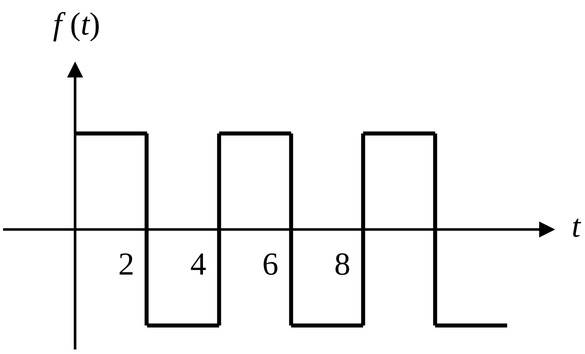
$$\Rightarrow f(t)=\frac{1}{t}(2-e^{-at}-e^{at})$$

5. $F(s)=\frac{\tanh s}{s}=\frac{1}{s}\frac{\sinh s}{\cosh s}=\frac{1}{s}\frac{e^s-e^{-s}}{e^s+e^{-s}}=\frac{1}{s}\frac{1-e^{-2s}}{1+e^{-2s}}$

$$=\frac{1}{s}(1-2e^{-2s}+2e^{-4s}-2e^{-6s}+\cdots)$$

$$=\frac{2}{s}(1-e^{-2s}+e^{-4s}-e^{-6s}+\cdots)-\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=2[u(t)-u(t-2)+u(t-4)-u(t-6)+\cdots]-u(t)$$



6. $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+3^2}]=\frac{1}{3}\sin 3t$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+3^2)^2}]=\frac{1}{3}\sin 3t*\frac{1}{3}\sin 3t$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^t \sin 3(t-\tau)\cdot\sin 3\tau\, d\tau$$

$$=\frac{1}{9}(\sin 3t\int_0^t \sin 3\tau\cos 3\tau\, d\tau-\cos 3t\int_0^t \sin^2 3\tau\, d\tau$$

$$=\frac{1}{9}[\frac{1}{6}\sin 3t\cdot\sin^2 3t-\frac{1}{2}\cos 3t(t-\frac{1}{6}\sin 6t)]$$

$$=\frac{1}{9}[\frac{1}{6}\sin^3 3t-\frac{1}{2}t\cos 3t+\frac{1}{6}\cos 3t\cdot\sin 3t\cdot\cos 3t)]$$

$$=\frac{1}{9}(\frac{1}{6}\sin 3t-\frac{1}{2}t\cos 3t)$$

$$=\frac{1}{54}\sin 3t-\frac{1}{18}t\cos 3t$$